GEOMETRIA EUCLIDIANA PLANA E CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS

Eliane Quelho Frota Rezende
Maria Lúcia Bontorim de Queiroz

GEOMETRIA EUCLIDIANA PLANA E CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS

EDITORA UNICAMP

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELO
SISTEMA DE BIBLIOTECAS DA UNICAMP
DIVISÃO DE TRATAMENTO DA INFORMAÇÃO

R339g Rezende, Eliane Quelho Frota.
Geometria euclidiana plana e construções geométricas / Eliane Quelho Frota Rezende e Maria Lúcia Bontorim de Queiroz. – 2ª ed. – Campinas, SP : Editora da Unicamp, 2008.

1. Geometria euclidiana. 2. Geometria plana. I. Queiroz, Maria Lúcia Bontorim de. II. Título.

ISBN 978-85-268-0754-9 CDD 516.22

Índices para catálogo sistemático:

1. Geometria euclidiana 516.22
2. Geometria plana 516.22

1ª edição, 2000
2ª edição, 2008
8ª reimpressão, 2023

Editora da Unicamp
Rua Sérgio Buarque de Holanda, 421 – 3º andar
Campus Unicamp
CEP 13083-859 – Campinas – SP – Brasil
Tel./Fax: (19) 3521-7718 / 7728
www.editoraunicamp.com.br – vendas@editora.unicamp.br

Para meu pai, Antonio (in memorian),
e minha mãe, Ana.

Para meu marido, Gera,
e minha filha, Marcela.

Eliane

Para meus pais, Santina (in memorian)
e Lúcio Armando (in memorian).

Para Gilberto,
Guilherme e Gilbertinho.

Maria Lúcia

Agradecemos

a Deus,
a nossa família e a todas
as pessoas que colaboraram
conosco para a realização deste trabalho.

Sumário

Apresentação

A origem da palavra *geometria* provém da palavra grega *geometrein*: *geo*, que significa *terra,* e *metrein,* que significa *medir*; assim, geometria foi originalmente a ciência de medir terras. Apresentamos, porém, neste trabalho, inúmeras situações que mostram que a geometria vai muito além de apenas uma ciência de medir terras.

A Geometria Euclidiana é estudada nas escolas desde o Ensino Fundamental. É simples para ser trabalhada, portanto adequada para ser utilizada desde a escola elementar. É baseada no texto do matemático grego Euclides, *Elementos,* escrito por volta do ano 300 a.C., texto este que teve o maior número de traduções, depois da Bíblia Sagrada.

A ideia deste trabalho surgiu quando ministramos disciplinas cujo conteúdo envolvia Geometria Plana e Desenho Geométrico, para cursos de Licenciatura e Bacharelado em Matemática. Notas de aulas foram se encaixando e, finalmente, compuseram este texto que agora apresentamos.

Assim, o objetivo desta proposta é oferecer aos alunos de graduação em Matemática ou áreas afins, como também aos cursos de especialização para professores de Matemática, com escolha e complementação prática adequadas, um texto que proporcione uma visão da Geometria Euclidiana Plana com Construções Geométricas, de modo que estas possam ser utilizadas como ferramentas para complementar e auxiliar o aprendizado da Geometria.

No tratado da Geometria, fazemos uso do método dedutivo (ou axiomático), que consiste em iniciar com certas afirmações chamadas "axiomas" ou "postulados", as quais aceitamos sem justificativas, e deduzir, através das demonstrações, outras afirmações, dentre as quais os teoremas. Procuramos, sempre que possível, restaurar a geometria no uso da régua e compasso, como está desenvolvido nos *Elementos*.

Os postulados de Euclides não bastam como fundamento lógico da geometria. Sabemos também que os postulados de Hilbert nos dão um desenvolvimento da geometria um tanto extenso. Assim, introduzindo os números reais como faz Birkhoff, podemos desenvolver a nossa teoria axiomática de modo mais simples e condensado, pelo qual, partindo de um número mínimo de afirmações aceitas de forma intuitiva sem demonstrações, podemos chegar de uma maneira mais rápida a resultados mais significativos. Além disso, é bastante interessante relacionar a Geometria com a Álgebra, pois o conhecimento de cada uma é fundamental para uma melhor compreensão das duas.

Desenvolvemos, pois, o estudo da Geometria Euclidiana Plana, retirado dos postulados do *School Mathematics Study Group: Geometry*, os quais seguem a linha dos postulados de G. D. Birkhoff, *A Set of Postulates for Geometry* (*based on scale and protractor*). Estes fazem uso dos números reais, que são usados livremente nas medidas de distâncias e ângulos.

Apresentamos todo o conteúdo deste texto distribuído em 14 capítulos. Os sete primeiros são destinados à Geometria Euclidiana Plana e os outros sete, às Construções Geométricas. Todos eles contêm uma parte teórica, com exemplos e problemas resolvidos, e uma parte de exercícios e problemas propostos; alguns, com o simples intuito de uma melhor compreensão e fixação da teoria apresentada; outros, mais elaborados, para o incentivo à busca de soluções, através do raciocínio e criatividade. Ressaltamos que, entre os exercícios propostos, estão colocados alguns resultados e definições a serem utilizados em capítulos posteriores. No final de alguns capítulos, apresentamos nota histórica que mostra um pouco da história da matemática envolvida.

A teoria desenvolvida no Capítulo 1 é importante pois dela depende todo o desenvolvimento do conteúdo contido nos capítulos seguintes. Entretanto, para alguns alunos pode parecer um pouco árdua. Deixamos ao professor a tarefa de, com escolha de recursos metodológicos convenientes, fazer uma apresentação dos resultados que ele contém a fim de que possam ser utilizados adequadamente.

Os três primeiros capítulos independem do axioma das paralelas, o qual caracteriza a Geometria Euclidiana. Este texto pode, portanto, servir de introdução a um estudo das Geometrias Não Euclidianas. Além disso, serve como base para um estudo da Geometria Espacial e Descritiva, o qual pretendemos concluir em outra oportunidade.

A publicação deste livro contou com o auxílio do Fundo de Apoio ao Ensino e à Pesquisa (Faep).

Eliane Quelho Frota Rezende
Maria Lúcia Bontorim de Queiroz

Capítulo 1

Retas e Ângulos

As primeiras ideias geométricas surgiram devido à necessidade do homem de efetuar medidas, dentre elas a de comprimento, ângulo e área.

Neste capítulo, tratamos de retas e ângulos e apresentamos alguns conceitos decorrentes, os quais são necessários para o desenvolvimento dos demais capítulos.

No nosso tratamento da geometria plana, iniciamos com os termos indefinido ponto e reta. O plano é visto como o conjunto em que os pontos são seus elementos e as retas, seus subconjuntos.

Iniciamos com alguns postulados relacionando os termos indefinidos e, no decorrer deste capítulo, obteremos resultados como consequências deles.

Retas

Os primeiros três postulados são conhecidos como **postulados de incidência**.

Postulado 1. Dados dois pontos distintos, existe uma única reta que os contém.

Postulado 2. Em qualquer reta estão no mínimo dois pontos distintos.

Pontos de uma mesma reta são chamados **pontos colineares**.

Postulado 3. Existem pelo menos três pontos distintos não colineares.

Em outras palavras, os postulados 2 e 3 nos dizem que toda reta contém pelo menos dois pontos distintos e que nem todos os pontos do plano são colineares.

Com apenas os postulados de incidência, os pontos de uma reta podem não ser representados pela figura usual de uma reta "contínua". Como exemplo podemos considerar um "plano" como sendo o conjunto formado por três pontos A, B e C, e considerar como "retas" desse plano os subconjuntos $\{A, B\}$, $\{A, C\}$ e $\{B, C\}$.

1.1 Definição. Duas **retas** são **paralelas** se não se interseccionam, isto é, se nenhum ponto pertence a ambas as retas. Duas retas *distintas* que se interseccionam são chamadas **retas concorrentes**.

Com essa definição e os postulados já apresentados, podemos demonstrar a afirmação que segue.

1.2 Teorema. Duas retas concorrentes interseccionam-se em um único ponto.

Demonstração. Consideremos r e s duas retas concorrentes num ponto P. Seja Q um outro ponto que também esteja em ambas as retas. Obtemos, pelo Postulado 1, a reta r como sendo a reta determinada pelos pontos P e Q, e a reta s também como sendo a reta determinada por P e Q. Pela unicidade apresentada neste postulado, r e s seriam a mesma reta, o que contradiz a hipótese de serem retas concorrentes. Logo P é único.

Vejamos alguns resultados que podem ser obtidos com os três postulados anteriores e cujas demonstrações deixamos como exercício.

1.3 Teorema.

a) Dada uma reta, existe pelo menos um ponto não pertencente a ela.
b) Dado um ponto qualquer, existe pelo menos uma reta não passando por ele.
c) Dado um ponto qualquer, existem pelo menos duas retas que passam por ele.

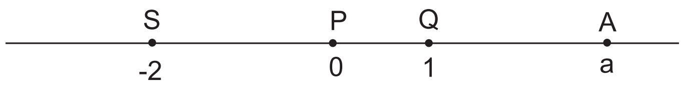
Seguindo a axiomática escolhida para este texto, nos próximos três postulados fazemos uso de propriedades dos **números reais.** Para uma referência, consulte *Análise Real,* de Elon Lages Lima, que consta em [17].

Postulado 4. (Postulado da Distância) A cada par de pontos corresponde um único número maior ou igual a zero, sendo que este número só é zero se os pontos forem coincidentes.

Este número obtido através do postulado acima é chamado **distância entre os dois pontos,** e os pontos são ditos **coincidentes** se forem o mesmo ponto.

Denotamos por PQ a distância entre os pontos P e Q.

Postulado 5. (Postulado da Régua) Podemos estabelecer uma correspondência entre os pontos de uma reta e os números reais de modo que
(1) cada ponto da reta corresponde a exatamente um número real,
(2) cada número real corresponde a exatamente um ponto da reta, e
(3) a distância entre dois pontos é o valor absoluto da diferença entre os números correspondentes.

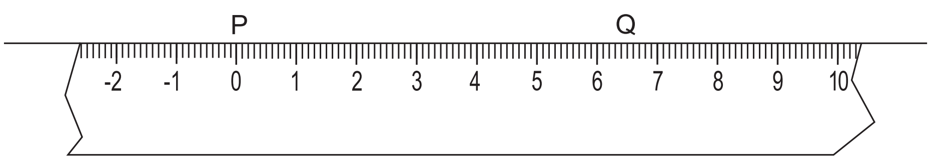


Na figura foi estabelecido que o número real -2 está em correspondência com o ponto S, o 0 (zero) com o ponto P,...

Observamos que este postulado nos dá a ideia de “continuidade”da reta. É chamado postulado da régua porque nos permite, através de uma “régua infinita”colocada sobre uma reta, medir a distância entre dois pontos quaisquer da reta.

Uma correspondência do tipo descrito no postulado acima é chamada **um sistema de coordenadas para a reta.** O número correspondente a qualquer ponto da reta é chamado **coordenada do ponto**. Assim, se temos dois pontos A e B cujas coordenadas são a e b respectivamente, a *distância entre os pontos* A *e* B é dada por $AB = |\ a - b\ |$.

Postulado 6. (Postulado da Colocação da Régua) Dados dois pontos P e Q numa reta, pode ser escolhido um sistema de coordenadas de modo que a coordenada de P seja zero e a coordenada de Q seja positiva.



1.4 Definição. Sejam A, B e C três pontos colineares e distintos dois a dois. Se $AB + BC = AC$, dizemos que B **está entre** A e C, o que denotamos por $A - B - C$.

Observe que se temos $A - B - C$ então temos também $C - B - A$.

Os próximos três teoremas dependem essencialmente do Postulado da Régua. Para utilizá-lo aqui, precisamos da relação “estar entre”para números reais, que é definida do seguinte modo: se x, y e z são números reais, dizemos que y está entre x e z se $x < y < z$ ou $z < y < x$. Ambos os casos são denotados por $x - y - z$.

1.5 Teorema. Sejam dados uma reta e três pontos A, B e C pertencentes a ela, com coordenadas x, y e z, respectivamente. Se $x - y - z$, então $A - B - C$.

Demonstração. Se $x < y < z$, então $AB = |y - x| = y - x$; $BC = |z - y| = z - y$; e $AC = |z - x| = z - x$. Logo temos $AB + BC = (y - x) + (z - y) = z - x = AC$. Logo temos $A - B - C$. Se $z < y < x$, procedendo analogamente obtemos $C - B - A$.

1.6 Teorema. Dados três pontos distintos pertencentes à mesma reta, um e apenas um deles está entre os outros dois.

Demonstração. Sejam A, B e C três pontos colineares distintos. Vamos mostrar inicialmente que um deles está entre os outros dois.

Sejam x, y e z as coordenadas dos pontos A, B e C, respectivamente. Por propriedades de números reais, apenas um, entre os números x, y e z, está entre os outros dois. Pelo teorema anterior obtemos que o correspondente ponto A, B ou C está entre os outros dois.

Agora vamos mostrar a unicidade, isto é, considerando que um dos pontos, por exemplo B, está entre os pontos A e C, vamos mostrar que não podemos ter que A está entre B e C e nem que C está entre A e B.

De fato, se A estivesse entre B e C, teríamos $BA + AC = BC$. Como por hipótese B está entre A e C, temos $AB + BC = AC$. De ambos resulta $2AB = 0$, o que é impossível, visto que A e B são pontos distintos. Analogamente, demonstramos que C não pode estar entre A e B.

Observe que a recíproca do Teorema 1.5 também é verdadeira: sob as condições deste teorema, se $A - B - C$ então $x - y - z$.

1.7 Teorema. Se A e B são pontos distintos quaisquer, então
(1) existe um ponto C tal que $A - B - C$;
(2) existe um ponto C' tal que $C' - A - B$;
(3) existe um ponto D tal que $A - D - B$.

Demonstração. Sejam x e y as coordenadas dos pontos A e B, respectivamente. Suponhamos $x < y$. Tomamos o ponto C com coordenada $y + 1$, o ponto C' com coordenada $x - 1$ e o ponto D com coordenada $\frac{x+y}{2}$, e as situações (1), (2) e (3) acima são facilmente verificadas. Para o caso $y < x$ o procedimento é análogo.

Podemos então, neste contexto, passar a denotar por $\overleftrightarrow{PQ}$ a reta determinada pelos pontos P e Q, o que lemos reta PQ.

1.8 Definições. Sejam A e B pontos distintos.
a) O **segmento de reta** AB**, ou simplesmente segmento** AB, o qual é denotado por $\overline{AB}$, é definido como sendo o conjunto dos pontos A e B, e dos pontos X tais que $A - X - B$. Os pontos A e B são denominados *extremidades do segmento* AB.

b) A **medida** ou **comprimento** de um segmento AB é definida como a distância entre os pontos A e B e, como tal, é denotada por AB.

c) A **semirreta de origem** A **contendo o ponto** B, a qual é denotada por $\overrightarrow{AB}$, é definida como a união dos pontos do segmento AB com o conjunto dos pontos X tais que $A - B - X$. O ponto A é denominado *origem* da semirreta.

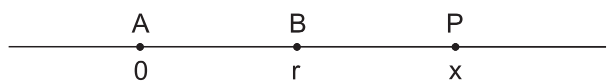
Se A está entre B e C, então $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são chamadas **semirretas opostas**.

1.9 Definição. Dois segmentos que possuem a mesma medida são chamados **segmentos congruentes.**

Como consequência do Postulado da Colocação da Régua temos o seguinte teorema:

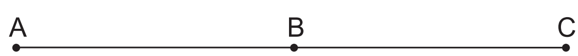
1.10 Teorema. **(Teorema da Localização de Pontos)** Seja $\overrightarrow{AB}$ uma semirreta e seja x um número positivo. Então existe um único ponto P em $\overrightarrow{AB}$ tal que $AP = x$.

Demonstração. Pelo Postulado da Colocação da Régua, podemos escolher um sistema de coordenadas para a reta $\overleftrightarrow{AB}$ de modo que a coordenada de A seja zero e a coordenada de B seja um número positivo r.



Seja P o ponto cuja coordenada é o número positivo x. Então P pertence a $\overrightarrow{AB}$ e $AP =\mid x - 0 \mid=\mid x \mid= x$. Como somente um ponto da semirreta tem a coordenada x, somente um ponto da semirreta estará a uma distância x de A.

1.11 Definição. Um ponto B é **ponto médio de um segmento** AC se B está entre A e C, e $AB = BC$.



1.12 Teorema. Todo segmento tem um único ponto médio.

Demonstração. Vamos inicialmente provar a existência do ponto médio. Consideremos o segmento AC. Queremos obter um ponto B tal que $AB + BC = AC$ e $AB = BC$.

Consideremos o número real positivo $x = \frac{1}{2}AC$. Pelo Teorema da Localização de Pontos, existe um único ponto B na semirreta $\overrightarrow{AC}$ tal que $AB = x$.

Como B está em $\overrightarrow{AC}$, temos que B ou está em $\overline{AC}$ ou $A - C - B$, sendo $B \neq A$, e $B \neq C$.

Se B está em $\overline{AC}$ temos $A - B - C$, logo $AB + BC = AC$ e portanto

$$BC = AC - \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}AC = AB.$$

Se B é tal que $A - C - B$ então temos $AC + CB = AB$ e portanto

$$CB = \frac{1}{2}AC - AC = -\frac{1}{2}AC < 0,$$

o que é um absurdo.

Logo temos $AB + BC = AC$ e $AB = BC$, isto é, B é ponto médio de $\overline{AC}$.

Para provarmos a unicidade do ponto médio, suponhamos que existe M, um outro ponto médio de AC, isto é, um ponto M satisfazendo: $AM + MC = AC$ e $AM = MC$.

Dessa forma, teríamos $2AM = AC$, portanto $AM = \frac{1}{2}AC$, e pelo Teorema 1.10, M coincidiria com B. Logo o ponto médio do $\overline{AC}$ é único.

Dizemos que o ponto médio de um segmento **bissecciona** o segmento. Mais geralmente, dizemos que qualquer figura cuja intersecção com um segmento seja o ponto médio desse segmento também bissecciona o segmento.

1.13 Definição. Um conjunto é **convexo** se, para todo par de pontos distintos P e Q desse conjunto, o segmento PQ está inteiramente contido nele.
Exemplos de conjuntos convexos são apresentados nas figuras a), b) e c) abaixo.
Exemplos de conjuntos não convexos são apresentados nas figuras d), e), f) e g).

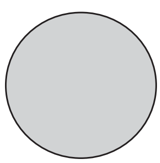


figura (a)

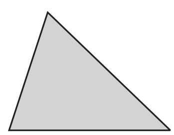


figura (b)

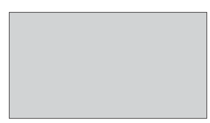


figura (c)

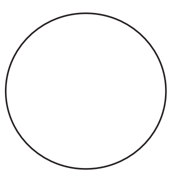


figura (d)

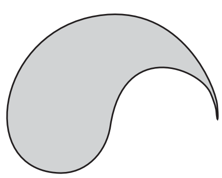


figura (e)

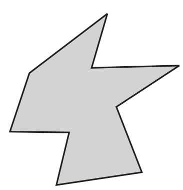


figura (f)

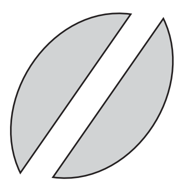


figura (g)

Postulado 7. (Postulado da Separação do Plano) Dada uma reta, os pontos que não pertencem a ela formam dois conjuntos disjuntos tais que
(1) cada um dos conjuntos é convexo,
(2) se P pertence a um dos conjuntos e Q ao outro, então o segmento PQ intersecciona a reta.