INTRODUÇÃO AOS MÉTODOS DA MATEMÁTICA APLICADA

Edmundo Capelas de Oliveira
José Emílio Maiorino

INTRODUÇÃO AOS MÉTODOS DA MATEMÁTICA APLICADA

EDITORA UNICAMP

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELO
SISTEMA DE BIBLIOTECAS DA UNICAMP
DIRETORIA DE TRATAMENTO DA INFORMAÇÃO

OL4i Oliveira, Edmundo Capelas de
Introdução aos métodos da matemática aplicada / Edmundo Capelas de Oliveira, José Emílio Maiorino. – 3ª ed. revista – Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2010.

1. Matemática. 2. Equações diferenciais. 3. Funções (Matemática). 4. Variáveis (Matemática). I. Maiorino, José Emílio. II. Título.

CDD 510
515.35
515.3
515.9

ISBN 978-85-268-0906-2

Índices para catálogo sistemático:

1. Matemática	510
2. Equações diferenciais	515.35
3. Funções (Matemática)	515.3
4. Variáveis (Matemática)	515.9

1ª edição, 1997
2ª edição, 2003
1ª reimpressão, 2014

Printed in Brazil.
Foi feito o depósito legal.

Direitos reservados à

Editora da Unicamp
Rua Caio Graco Prado, 50 – Campus Unicamp
CEP 13083-892 – Campinas – SP – Brasil
Tel./Fax: (19) 3521-7718/7728
www.editora.unicamp.br – vendas@editora.unicamp.br

A nossos pais: Conceição e Manoel,
Anna Lydia e José Maurício.

Sumário

Prefácio

O presente livro tem o objetivo de servir como um complemento bibliográfico para as disciplinas *Métodos da Matemática Aplicada*, ministradas durante três semestres no curso de Matemática Aplicada do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Unicamp. Além disso, acreditamos que ele também possa ser um suporte bastante didático para várias outras disciplinas ministradas na Unicamp, bem como em outras instituições de ensino.

Foi pensando na simplicidade e clareza que optamos pela filosofia da *mão na massa*: se o estudante não se exercitar enquanto cursa uma certa disciplina, dificilmente o fará quando solicitado.

Os capítulos estão, por este motivo, escritos em grau crescente de dificuldade, da mesma forma que os problemas propostos. Todos os problemas são acompanhados de resposta e/ou de alguma sugestão para resolução, a fim de que o estudante possa avaliar seu próprio desempenho. Enfim, com exceção do décimo capítulo, todos os demais estão escritos do seguinte modo: após uma breve introdução, apresentamos um resumo da teoria, discutimos e resolvemos um ou mais problemas e em seguida propomos em torno de quarenta problemas para serem resolvidos pelo estudante.

No primeiro capítulo discutimos as equações diferenciais ordinárias, lineares e de segunda ordem mais simples para em seguida, no segundo capítulo, após apresentarmos as séries de potências, discutirmos o método de resolução de equações diferenciais lineares com coeficientes variáveis, também chamado método de Frobenius. No terceiro capítulo estudamos algumas propriedades das funções de uma variável complexa a fim de, no quarto capítulo, introduzir as chamadas funções especiais, construídas a partir da função hipergeométrica. De posse das funções especiais, apresentamos no quinto capítulo as séries de Fourier, Fourier-Bessel e Fourier-Legendre.

O sexto capítulo é dedicado às transformadas integrais de Fourier e de Laplace, e no sétimo estudamos os sistemas de Sturm-Liouville, aproveitando para introduzir o conceito de função de Green. No oitavo capítulo apresentamos as equações diferenciais parciais, lineares e de segunda ordem, dando ênfase à sua classificação, a fim de, no capítulo nove, após introduzir o método de separação de variáveis, resolver tais equações parciais com as respectivas condições de contorno e iniciais. No décimo capítulo discutimos as aplicações propriamente ditas; resolvemos completamente um ou dois exemplos e deixamos mais alguns problemas a cargo do estudante.

Seria vão tentar enumerar todas as pessoas que, de uma ou de outra forma, colaboraram com a realização deste trabalho. Desejamos, entretanto, registrar nosso agradecimento a nossas famílias e aos membros do Departamento de Matemática Aplicada do Imecc e do Departamento de Ciências Naturais da Funrei. Em especial, desejamos mencionar os professores Waldyr A. Rodrigues Jr. e Quintino A. G. de Souza, cujo apoio e estímulo foram decisivos para a realização desta obra.

Campinas, novembro de 1997

Nota à segunda edição

Para esta edição gostaríamos de externar nossos agradecimentos aos professores doutores J. Vaz Jr., do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, e M. J. Menon, do Instituto de Física "Gleb Wataghin", ambos da Unicamp, bem como a vários estudantes que, no decorrer do tempo, sugeriram modificações e/ou correções, que muito contribuíram para a melhoria deste trabalho.

Campinas, fevereiro de 2003

Nota à terceira edição

Para esta edição, acrescentamos alguns problemas resolvidos e propostos, e o texto foi revisto e adequado à nova ortografia.

Agradecemos mais uma vez a todos os que sugeriram melhorias no texto, e em especial ao Prof. F. Mainardi (Università di Bologna), por ter sugerido algumas mudanças que, acreditamos, contribuíram muito para o aprimoramento deste trabalho.

Campinas, julho de 2010.

Capítulo 1

Equações diferenciais ordinárias de segunda ordem

Uma equação diferencial ordinária, linear, de segunda ordem para a função $y(x)$ é dada, em sua forma mais geral, por

$$A(x)y''(x) + B(x)y'(x) + C(x)y(x) = F(x),$$

onde as linhas denotam diferenciação em relação à variável independente x.

Supondo-se que $A(x) \neq 0$ e que $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ e $F(x)$ são funções contínuas num intervalo aberto I, a equação acima pode ser transformada em

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = f(x). \tag{1.1}$$

Se $f(x) = 0$ a equação é chamada *homogênea*. Por isso, a equação obtida da equação (1.1) eliminando-se o termo independente $f(x)$ (também chamado *termo não homogêneo*) é chamada de equação *homogênea associada* à equação (1.1).

A solução geral para a equação acima é dada por

$$y(x) = y_H(x) + y_P(x),$$

onde $y_H(x)$ é a solução geral da equação homogênea e $y_P(x)$ é uma solução particular da equação não homogênea. Para uma equação diferencial de segunda ordem linear e homogênea, a solução geral será formada por duas funções *linearmente independentes* $y_1(x)$ e $y_2(x)$, cada uma das quais multiplicada por uma constante arbitrária, i.e. $y_H(x)$ terá a forma

$$y_H(x) = Ay_1(x) + By_2(x).$$

Cada uma das funções $y_i(x)$, $i = 1, 2$, é solução da equação diferencial homogênea, e qualquer possível solução pode ser escrita como uma combinação linear de ambas.

Para resolvermos a equação não homogênea basta que conheçamos *uma* solução da equação homogênea. A partir desta, utilizando redução de ordem,[1] obtemos a outra

[1] Ver PP 1.6.

solução, linearmente independente, da mesma equação homogênea. Para encontrar a solução particular, uma vez conhecidas as duas soluções linearmente independentes da equação homogênea, basta utilizar, por exemplo, o *método de variação de parâmetros*, também chamado de *método de Lagrange*.

A resolução completa de uma equação diferencial ordinária envolve ainda a aplicação de restrições sobre a solução geral, impondo-se que a função obtida satisfaça certas *condições de contorno* ou certas *condições iniciais* presentes no problema real do qual surgiu a equação.

Por serem bastante utilizados, vamos apresentar os métodos de resolução de equações com coeficientes constantes e equações do tipo Euler.

1.1 Equação com coeficientes constantes

Para resolver uma equação diferencial ordinária linear de segunda ordem, com coeficientes constantes

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = 0$$

onde a e b são constantes, supomos que uma solução para ela tenha a forma

$$y(x) = \mathrm{e}^{mx}\ ,$$

visto que a derivada de uma exponencial deste tipo é igual à mesma exponencial multiplicada por um fator constante. Substituindo $y(x)$ e suas derivadas na equação dada, obtemos uma equação algébrica de segundo grau na variável m, chamada *equação auxiliar*, dada por

$$m^2 + am + b = 0\,,$$

cujas raízes são m_1 e m_2. Se $m_1 \neq m_2$ temos imediatamente duas soluções linearmente independentes, $y_1(x) = \mathrm{e}^{m_1 x}$ e $y_2(x) = \mathrm{e}^{m_2 x}$. Quando a equação algébrica encontrada possui uma única raiz, isto é, uma raiz dupla m, partimos da solução $y = \mathrm{e}^{mx}\, v(x)$ e procuramos a outra solução linearmente independente por redução de ordem.

1.2 Equação do tipo Euler

Chama-se *equação diferencial do tipo Euler* a toda equação do tipo

$$x^2 y''(x) + axy'(x) + by(x) = 0$$

onde a e b são constantes. A solução desta equação é obtida supondo-se que ela tem a forma

$$y(x) = x^m$$

o que leva, como no caso da equação a coeficientes constantes, a uma equação algébrica para m:

$$m(m-1) + am + b = 0\,.$$

Se esta equação tem duas raízes distintas m_1 e m_2, então $y_1 = x^{m_1}$ e $y_2 = x^{m_2}$ são as duas soluções linearmente independentes procuradas. Se $m_1 = m_2$ basta encontrar a segunda solução linearmente independente por redução de ordem.

Referências: [3, 5, 6, 7, 8, 9, 16, 22, 25, 28, 29, 30, 31, 32, 34, 54, 58]

1.3 Problemas resolvidos

PR 1.1. Método de variação de parâmetros: Obter uma solução para a equação diferencial

$$y'' + y = \operatorname{sen} x\,,$$

com $y = y(x)$, satisfazendo as condições $y(0) = 1$ e $y'(0) = 1/2$.
Resolução: A solução da equação homogênea (equação com coeficientes constantes)

$$y'' + y = 0$$

é dada por $y_H(x) = A \operatorname{sen} x + B \cos x$, onde A e B são duas constantes arbitrárias.

Utilizamos o *método de variação de parâmetros* para obter uma solução particular da equação não homogênea, embora neste caso fosse mais fácil partir de uma combinação linear de senos e cossenos, introduzindo-a na equação não homogênea a fim de encontrar os coeficientes que tornem esta combinação linear uma solução daquela equação (*método dos coeficientes a determinar*).[2]

Então, suponhamos que as constantes A e B sejam funções de x, isto é, suponhamos que $A = u_1(x)$ e $B = u_2(x)$; uma solução particular da equação não homogênea terá a forma

$$y_P(x) = u_1(x) \operatorname{sen} x + u_2(x) \cos x \tag{1.2}$$

onde $u_1(x)$ e $u_2(x)$ serão determinadas a partir de duas condições. A primeira condição a ser imposta é, obviamente, que $y_P(x)$ seja uma solução da equação não homogênea. Esta condição, porém, não é suficiente para determinar univocamente $u_1(x)$ e $u_2(x)$, e nos deixa liberdade para impor uma outra condição sobre estas funções, a qual nos permitirá simplificar a resolução do problema.

Derivando a expressão para $y_P(x)$ temos

$$y'_P(x) = u'_1(x) \operatorname{sen} x + u_1(x) \cos x + u'_2(x) \cos x - u_2(x) \operatorname{sen} x$$

[2]Veja um exemplo de aplicação deste método no PR 10.1.

e, devido à liberdade da segunda condição, impomos que

$$u_1'(x)\operatorname{sen} x + u_2'(x)\cos x = 0\ ,$$

de onde se segue que

$$y_P'(x) = u_1(x)\cos x - u_2(x)\operatorname{sen} x. \tag{1.3}$$

A segunda derivada de $y_P(x)$ fica então

$$y_P''(x) = u_1'(x)\cos x - u_1(x)\operatorname{sen} x - u_2'(x)\operatorname{sen} x - u_2(x)\cos x. \tag{1.4}$$

Agora, utilizando a primeira condição, substituímos as equações (1.3) e (1.4) na equação não homogênea e obtemos

$$u_1'(x)\cos x - u_2'(x)\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x.$$

Portanto, para determinar $u_1'(x)$ e $u_2'(x)$ devemos resolver o seguinte sistema:

$$\begin{cases} u_1'(x)\operatorname{sen} x + u_2'(x)\cos x = 0 \\ u_1'(x)\cos x - u_2'(x)\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x. \end{cases}$$

Utilizando a regra de Cramer, como se este fosse um sistema de equações lineares a coeficientes constantes, encontramos

$$u_1'(x) = \operatorname{sen} x\cos x$$

e

$$u_2'(x) = -\operatorname{sen}^2 x,$$

e integrando estas equações obtemos[3]

$$u_1(x) = -\frac{1}{4}\cos 2x; \tag{1.5}$$

$$u_2(x) = -\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x. \tag{1.6}$$

A solução da equação não homogênea é obtida substituindo as equações (1.5) e (1.6) na equação (1.2), e somando o resultado à solução geral da equação homogênea, logo

$$y(x) = C_1\operatorname{sen} x + C_2\cos x - \frac{x}{2}\cos x$$

onde C_1 e C_2 são constantes arbitrárias. Agora, utilizando as condições dadas, temos

$$y(0) = C_2 = 1 \Rightarrow C_2 = 1$$

e

$$y'(0) = C_1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow C_1 = 1.$$

[3]Não é necessário adicionar as constantes de integração, uma vez que estamos procurando *uma* solução particular da equação não homogênea.

Disto segue-se que a função que satisfaz a equação diferencial e as condições iniciais é dada por

$$y(x) = \operatorname{sen} x + \cos x - \frac{x}{2}\cos x.$$

PR 1.2. Problema massa-mola com vibrações forçadas: Considere o movimento, sem amortecimento, de uma massa m acoplada à extremidade livre de uma mola de constante elástica k. Suponha que uma força periódica externa, dada por $f_0 \operatorname{sen} \mu t$, com f_0 e μ constantes reais, é aplicada à massa. Utilizando a segunda lei de Newton, a equação diferencial[4] que descreve o movimento da massa é dada por

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) + \omega^2 x(t) = \frac{f_0}{m}\operatorname{sen}\mu t \tag{1.7}$$

onde $\omega^2 = k/m$ é a frequência do movimento (oscilador harmônico).

(i) Mostre que o deslocamento $x(t)$ da massa m é dado por

$$x(t) = c_1 \cos\omega t + c_2 \operatorname{sen}\omega t + c_3 \operatorname{sen}\mu t$$

onde c_1 e c_2 são constantes e $c_3 = f_0/m(\omega^2 - \mu^2)$ e (ii) discuta o caso em que $\omega = \mu$.
Resolução: (i) Primeiramente, consideremos a equação homogênea

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) + \omega^2 x(t) = 0$$

cuja solução geral é dada por

$$x(t) = c_1 \cos\omega t + c_2 \operatorname{sen}\omega t$$

onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias.

Para obtermos uma solução particular da equação não-homogênea vamos considerar a seguinte combinação

$$x_p(t) = A\cos\mu t + B\operatorname{sen}\mu t$$

visto que o segundo membro da equação (1.7) é igual ao produto de uma constante por $\operatorname{sen}\mu t$.

Então, derivando duas vezes e substituindo-se na respectiva equação não homogênea, podemos escrever

$$-A\mu^2\cos\mu t - B\mu^2\operatorname{sen}\mu t + A\omega^2\cos\mu t + B\omega^2\operatorname{sen}\mu t = \frac{f_0}{m}\operatorname{sen}\mu t$$

de onde obtemos o seguinte sistema linear

$$\left\{\begin{array}{rcl} -A\mu^2 + A\omega^2 & = & 0 \\ -B\mu^2 + B\omega^2 & = & \dfrac{f_0}{m} \end{array}\right.$$

[4]Ver PP1.15.

com solução dada por $A=0$ e $B=f_0/m(\omega^2-\mu^2)$ logo, uma solução particular da equação não homogênea é dada por

$$x_p(t)=\frac{f_0}{m(\omega^2-\mu^2)}\,\mathrm{sen}\,\mu t$$

com $\omega\neq\mu$ de onde, combinando com a solução da equação homogênea, temos para o deslocamento

$$x(t)=c_1\cos\omega t+c_2\,\mathrm{sen}\,\omega t+c_3\,\mathrm{sen}\,\mu t$$

onde $c_3=f_0/m(\omega^2-\mu^2)$.

(ii) Por outro lado, quando $\omega=\mu$, o termo não homogêneo é também solução da equação homogênea. Aqui, vamos utilizar diretamente o método de variação de parâmetros a fim de obter uma solução particular da equação não homogênea.

Escrevemos, a partir da solução da equação homogênea, a seguinte solução, já com a substituição $\omega=\mu$, isto é,

$$x_p(t)=u(t)\cos\mu t+v(t)\,\mathrm{sen}\,\mu t$$

onde $u(t)$ e $v(t)$ devem ser determinadas.

Derivando a expressão anterior em relação a t temos

$$x_p'(t)=u'\cos\mu t-\mu u\;\mathrm{sen}\,\mu t+v'\,\mathrm{sen}\,\mu t+\mu v\;\cos\mu t$$

onde omitimos a dependência explícita da variável independente. Impondo-se a condição (livre)

$$u'\cos\mu t+v'\,\mathrm{sen}\,\mu t=0$$

obtemos

$$x_p'(t)=-\mu u\,\mathrm{sen}\mu t+\mu v\;\cos\mu t.$$

Derivando novamente em relação a t e substituindo o resultado na equação não homogênea, obtemos

$$u'\,\mathrm{sen}\,\mu t-v'\cos\mu t=-\frac{f_0}{\mu m}\mathrm{sen}\mu t$$

ou ainda, o seguinte sistema linear para u' e v'

$$\begin{cases} u'\cos\mu t+v'\,\mathrm{sen}\,\mu t &= 0\\ u'\,\mathrm{sen}\,\mu t-v'\cos\mu t &= -\dfrac{f_0}{\mu m}\,\mathrm{sen}\,\mu t\end{cases}$$

com solução dada por

$$u'=-\frac{f_0}{\mu m}\,\mathrm{sen}^2\,\mu t\qquad \text{e}\qquad v'=\frac{f_0}{\mu m}\,\mathrm{sen}\,\mu t\;\cos\mu t$$

cujas integrações permitem escrever, respectivamente,

$$u=-\frac{f_0}{2\mu m}t+\frac{f_0}{4\mu^2 m}\,\mathrm{sen}\,2\mu t\qquad \text{e}\qquad v=-\frac{f_0}{4\mu^2 m}\cos 2\mu t.$$

Então, voltando na solução $x_p(t)$ encontramos uma solução particular, dada por

$$x_p(t)=-\frac{f_0}{2\mu m}t\;\cos\mu t$$

de onde podemos escrever a solução da equação não homogênea, isto é

$$x(t) = c_1 \cos \mu t + c_2 \operatorname{sen} \mu t - \frac{f_0}{2\mu m} t \cos \mu t$$

onde c_1 e c_2 são constantes.

PR 1.3. A equação radial: Quando utilizamos o método de separação de variáveis[5] para resolver a equação de Laplace (equação satisfeita, por exemplo, pelo potencial elétrico ou gravitacional) em coordenadas esféricas, emerge a chamada equação radial (equação independente da parte angular), que é dada por

$$\frac{d^2}{dr^2} R(r) + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} R(r) - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} R(r) = 0,$$

onde a constante de separação ℓ é um número inteiro não negativo.

(i) Resolva a equação radial e (ii) Qual será a consideração a ser feita se impusermos (condição física do problema) que a solução (radial) seja regular[6] na origem?

Resolução: (i) Esta equação pode ser identificada como uma equação de Euler de onde procuramos uma solução na forma

$$R(r) = r^\alpha$$

onde α é um parâmetro que deve ser determinado.

Derivando em relação a r e substituindo-se na equação diferencial temos uma equação algébrica na incógnita α

$$[\alpha(\alpha - 1) + 2\alpha - \ell(\ell+1)]\, r^\alpha = 0$$

com soluções $\alpha_1 = \ell$ e $\alpha_2 = -\ell - 1$.

Visto que ℓ é um inteiro não negativo $\alpha_1 \neq \alpha_2$ logo, a solução geral da equação diferencial é dada por

$$R(r) = c_1 r^\ell + \frac{c_2}{r^{\ell+1}}$$

onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias.

(ii) Uma vez que estamos procurando soluções regulares na origem, devemos, neste caso, impor $c_2 = 0$ de onde

$$R(r) = c_1 r^\ell$$

onde c_1 é uma constante arbitrária. Note que, na origem ($r = 0$), para $c_2 \neq 0$, a solução não está definida.

---

[5]Em linhas gerais, o método de separação de variáveis conduz, quando possível, uma equação a derivadas parciais num conjunto de equações diferenciais ordinárias. Ver cap. 9.

[6]Ver cap. 3.

1.4 Problemas propostos

PP 1.1. Obter a solução geral[7] para as seguintes equações diferenciais ordinárias com coeficientes constantes, com $y = y(x)$:

(a) $y'' + \omega^2 y = 0$ com $\omega^2 =$ constante positiva.

(b) $y'' + 2y' + y = 0$.

(c) $y'' + 5y' + 4y = 0$.

(d) $y'' + 2y' + 2y = 0$.

PP 1.2. Discutir, conforme o parâmetro λ seja positivo, nulo ou negativo, as possíveis soluções da equação diferencial

$$y'' + \lambda y = 0, \qquad y = y(x).$$

PP 1.3. Sendo a^2 uma constante positiva, resolva a equação diferencial

$$x^2 y'' + 2xy' + \frac{a^2}{x^2} y = 0, \qquad y = y(x).$$

PP 1.4. Obter a solução geral para a seguinte equação tipo Euler:

$$x^2 y'' - 4xy' + 4y = 0, \qquad y = y(x).$$

PP 1.5. Resolver a equação diferencial

$$(1 + x^3) y'' - 3x^2 y' = 0, \qquad y = y(x),$$

satisfazendo as condições $y(0) = 0$ e $y(1) = 5$.

PP 1.6. Redução de ordem: Suponha que $y_1(x) \neq 0$ é uma solução de

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \qquad y = y(x).$$

O método de redução de ordem consiste em buscar uma segunda solução linearmente independente na forma $y_2(x) = y_1(x)v(x)$. Substitua $y_2(x)$ na equação dada e a partir da equação obtida para $v(x)$ mostre que

$$v(x) = \int^x \frac{\exp\{-\int^{x'} p(x'')dx''\}}{[y_1(x')]^2} dx',$$

e que, portanto, uma segunda solução linearmente independente é dada por

$$y_2(x) = y_1(x) \int^x \frac{\exp\{-\int^{x'} p(x'')dx''\}}{[y_1(x')]^2} dx'.$$

[7] A linha $'$ denota diferenciação com relação à variável independente.