

LÓGICA MATEMÁTICA



UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Reitor

MARCELO KNOBEL

Coordenadora Geral da Universidade

TERESA DIB ZAMBON ATVARS



Conselho Editorial

Presidente

MÁRCIA ABREU

ANA CAROLINA DE MOURA DELFIM MACIEL – EUCLIDES DE MESQUITA NETO

MÁRCIO BARRETO – MARCOS STEFANI

MARIA INÊS PETRUCCI ROSA – OSVALDO NOVAIS DE OLIVEIRA JR.

RODRIGO LANNA FRANCO DA SILVEIRA – VERA NISAKA SOLFERINI

José Carlos Magossi

LÓGICA MATEMÁTICA
Uma introdução

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELO
SISTEMA DE BIBLIOTECAS DA UNICAMP
DIRETORIA DE TRATAMENTO DA INFORMAÇÃO
Bibliotecária: Maria Lúcia Nery Dutra de Castro – CRB-8ª / 1724

M275L Magossi, José Carlos.
 Lógica matemática: uma introdução / José Carlos Magossi. Campinas, SP:
 Editora da Unicamp, 2020.

 1. Lógica simbólica e matemática. 2. Inferência (Lógica) 3. Cálculo
 proposicional. I. Título

CDD – 511.3
 – 519.54
 – 511.3

ISBN 978-65-86253-35-1

Copyright © José Carlos Magossi
Copyright © 2020 by Editora da Unicamp

Opiniões, hipóteses e conclusões ou recomendações expressas
neste material são de responsabilidade do autor e não
necessariamente refletem a visão da Editora da Unicamp.

Direitos reservados e protegidos pela lei 9.610 de 19.2.1998.
É proibida a reprodução total ou parcial sem autorização,
por escrito, dos detentores dos direitos.

Printed in Brazil.
Foi feito o depósito legal.

Direitos reservados à

 Editora da Unicamp
 Rua Sérgio Buarque de Holanda, 421 – 3ª andar
 Campus Unicamp
 CEP 13083-859 – Campinas – SP – Brasil
 Tel.: (19) 3521-7718 / 7728
www.editoraunicamp.com.br – vendas@editora.unicamp.br

À minha amada e corajosa esposa, Sílvia Regina,
às minhas filhas, Giulia Isabela e Clara Giuliana,
inspiração contínua de vida,
dedico este livro.

Sumário

Prefácio	9
Introdução	11
1 Cálculo proposicional	13
1.1 A linguagem \mathcal{P} da lógica proposicional clássica	15
1.1.1 Sintaxe	15
1.1.2 Parênteses	19
1.1.3 Semântica	22
1.1.4 Substituição	37
1.2 Conjunto completo de conectivos	39
1.3 Forma normal conjuntiva	49
1.3.1 Forma normal conjuntiva completa	52
1.4 Forma normal disjuntiva	54
1.4.1 Forma normal disjuntiva completa	56
1.5 Lógica matemática e aplicações	58
1.5.1 Princípio de indução matemática	58
1.5.2 Condição necessária e suficiente	61
1.5.3 Demonstrações em aritmética	63
1.5.4 Euclides e os infinitos números primos	65
1.5.5 O crivo de Eratóstenes	67
1.5.6 Euler e a demonstração de que há infinitos números primos	69
1.5.7 Prova de que $\sqrt{2}$ não é um número racional	73
1.5.8 Álgebra booleana, teoria de conjuntos e lógica matemática	74
1.6 Exercícios	76

2	Tableaux analíticos	83
2.1	Sistema formal - <i>Tableaux</i> analíticos	83
2.1.1	Abordagem intuitiva	84
2.1.2	Abordagem formal	87
2.1.3	Fórmulas do tipo β e fórmulas do tipo α	90
2.1.4	Extensões de ramos	92
2.2	Deduções- <i>tableaux</i>	100
2.3	Correção	113
2.3.1	Consistência	121
2.3.2	Conjuntos maximais	123
2.4	Completude via conjuntos maximais consistentes	125
2.5	Completude e conjuntos de Hintikka	128
2.6	Exercícios	134
3	Regras de inferência	141
3.1	Inferência lógica	141
3.2	Aplicação na matemática	148
3.3	Exercícios sobre regras de inferência	149
4	Método axiomático	153
4.1	Axiomas	153
4.2	Aplicações em matemática e exercícios	157
4.3	Exercícios sobre métodos axiomáticos	161
5	Cálculo de quantificadores	163
5.1	Noção intuitiva de quantificadores	163
5.2	Cálculo de quantificadores e linguagem do dia a dia	168
5.3	Linguagem \mathcal{L}_Q do cálculo de quantificadores	171
5.3.1	Variáveis livres e ligadas	175
5.4	Semântica de \mathcal{L}_Q	177
5.4.1	Interpretação de \mathcal{L}_Q	180
5.5	<i>Tableaux</i> analíticos para \mathcal{L}_Q	190
5.5.1	Regras- <i>tableaux</i> para \mathcal{L}_Q	192
5.6	Aplicações em matemática	207
5.7	Exercícios sobre quantificadores	210
5.8	Exercícios diversos	214
	Bibliografia	221
	Índice	224

Prefácio

Este livro, *Lógica matemática: uma introdução*, fundamenta-se em mais de 30 anos de experiência didática de seu autor em sala da aula. José Carlos Magossi é docente da Faculdade de Tecnologia – FT da Universidade Estadual de Campinas – Unicamp, tendo lecionado lógica e matemática em várias instituições de ensino, para diversas turmas de estudantes, em diferentes cursos e com distintos perfis. Magossi não pretende, com este trabalho, apresentar um tratado de lógica, mas um livro didático, que seja “companheiro do aluno”, em que o estudante, ou o leitor em geral, possa captar os conceitos e as estruturas básicas da lógica e de suas aplicações à matemática e aos fundamentos da ciência. Busca, no texto, um equilíbrio entre intuição, motivação e cuidado didático, e abordagem formal.

O livro consta de cinco capítulos, o primeiro e o último sobre o cálculo proposicional clássico e o cálculo de predicados de primeira ordem, respectivamente, com três capítulos intermediários sobre *tableaux* analíticos, regras de inferência e sobre o método axiomático.

O primeiro capítulo, com uma introdução sucinta sobre a noção de lógica e sobre os objetivos do livro, é dedicado à introdução do cálculo proposicional clássico aristotélico, de sua linguagem formal e da semântica de valorações. É bastante didática, com bons exemplos, a seção sobre valorações proposicionais e relações com proposições do dia a dia. Na última seção, sobre lógica matemática e aplicações, são apresentados interessantes tópicos da matemática, nos quais são explicitadas aplicações diretas dos conceitos lógicos estudados.

No capítulo dois, propriedades sintáticas e metapropriedades do cálculo proposicional são analisadas pelo método dos *tableaux* analíticos. O objetivo no capítulo três, sobre regras de inferência, consiste em preparar o leitor para processos de dedução e demonstração fundamentados em regras de inferência.

O quarto capítulo, com uma pequena introdução histórica e também com aplicações em matemática, versa sobre o método axiomático, de fun-

damental relevância para a lógica contemporânea.

O último capítulo introduz o cálculo de predicados de primeira ordem, ou cálculo de quantificadores, com a apresentação de uma semântica para sua linguagem de primeira ordem. Como no caso proposicional, é desenvolvido o correspondente método de *tableaux* analíticos, que possibilita a demonstração de resultados sintáticos fundamentais.

Em todos os capítulos, além de aplicações à matemática, há uma seção final com bons exercícios relativos aos temas expostos no capítulo, visando à sedimentação do aprendizado. Tenho acompanhado a formação acadêmica de José Carlos Magossi, desde antes de seu doutorado, e sou testemunha da seriedade com que se dedica a seu exercício profissional, em especial a suas atividades didáticas. Estou certa de que este livro cumprirá seus objetivos e será muito útil ao estudante iniciante em lógica.

Itala M. Loffredo D'Ottaviano

Introdução

Na atualidade muitos cursos de graduação, em universidades ou faculdades, contemplam disciplinas de lógica, sejam elas com o simples nome lógica ou com nomes tais como: introdução à lógica, lógica matemática, noções de lógica etc. Não são muitos os cursos que se valem dessa disciplina, mas ciência da computação, informática, licenciatura em matemática são alguns daqueles que incluem lógica como uma das disciplinas do catálogo do curso.

No entanto, em razão do forte apelo da palavra “lógica” como sinônimo de bom senso, há uma certa oscilação no ensino da lógica. Ora o foco situa-se na filosofia, ora na matemática e, em alguns casos, volta-se para a relação com as ciências da computação de dados e informática. Ao observar essas nuances de foco, objetiva-se neste livro introduzir lógica com foco em matemática, mesmo que comentários filosóficos sejam descritos ao longo do livro, o foco reside na matemática.

Sempre que possível, exemplos da relação entre lógica e matemática são expostos. O motivo disso é que, em vários textos voltados à matemática, que se valem de fortes interações com lógica matemática, esse assunto acaba por não ser abordado.

Assim, o leitor, estudante, ao longo de seus estudos em matemática, tem que intuir sobre o porquê de alguns raciocínios, ou tem que ter já estudado lógica matemática. Um exemplo claro disso reside nos cursos de análise matemática e suas ramificações, como cálculo, topologia etc.

O nome axiomas de completude para os números reais, por exemplo, não é tratado, em alguns textos, como parte de um sistema lógico. Pelo menos não é enfatizada essa forte característica. Segue-se daí uma impressão, por exemplo, de que a análise matemática se configura como um amontoado de teoremas e não como um sistema lógico em que seus teoremas advêm de uma estrutura algébrica, denominada corpo, a qual é ordenada e, graças ao axioma de completude, completa.

Não somente essa vertente inspira a escrita do presente livro. Outro ponto importante é a ausência de explicação de inferências lógicas em textos

matemáticos, o que dificulta a compreensão de determinados conceitos. Por exemplo, “se a série infinita $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ é convergente, então o limite do termo geral é zero ($\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$)”. Essa frase refere-se a um teorema presente no estudo de sequências e séries em cursos de cálculo. O teorema é correto, no entanto uma forma lógica equivalente é bem mais utilizada, qual seja, “se o limite do termo geral é diferente de zero, então a série é divergente”.

Essa nova forma, muitas vezes, é inferida como normal e imediata, e o aluno (que não conhece lógica) se sente desconfortável por não encontrar segurança nessa forma de contraposição. Neste livro objetiva-se exibir a lógica matemática de tal forma que, em situações como a exposta acima, o aluno (ou leitor) possa de imediato raciocinar, $X \rightarrow Y \equiv \neg Y \rightarrow \neg X$. Não só em cursos universitários essa ausência de explicação da presença da lógica matemática ocorre. Em livros de ensino fundamental e médio, em testes de admissão para concursos públicos, há também a utilização de lógica matemática, em alguns casos, infelizmente, sem deixar claro que se trata de um estudo voltado à lógica matemática.

O livro traz uma sequência de capítulos que abordam o cálculo proposicional inicialmente e suas propriedades básicas. Após essa primeira visão da lógica matemática e de alguns exemplos matemáticos, inicia-se o estudo de processos formais, começando com *tableaux*, passando por regras de inferência e finalizando com sistemas axiomáticos. Por se tratar de um livro de cunho didático, algumas demonstrações, dignas de estudos sobre lógica em um nível mais aprofundado, serão omitidas. Opta-se por manter o leitor diante de uma exposição em que a leitura possa ser contínua e sem sobressaltos abstratos.

Na sequência, expõe-se a lógica de primeira ordem, em que se abordam apenas predicados de primeira ordem. O objetivo é expor algumas propriedades que são relevantes para a compreensão dos quantificadores universal e existencial e de suas relações com interpretações e deduções. Introduce-se levemente, de modo indireto, a noção de um domínio com infinitos elementos. Este é um assunto complicado, mas espera-se ter contribuído para que uma noção conceitual tenha sido exposta. De modo análogo, alguns teoremas não serão demonstrados, haja vista a complexidade de raciocínio envolvida.

Este livro, de um modo geral, tem como meta mostrar que é possível, em muitas situações da matemática, lançar mão de raciocínios dedutivos, os quais auxiliam na composição da relação entre sintaxe e semântica, da relação entre os teoremas e seus conceitos.

Capítulo 1

Cálculo proposicional

A palavra “lógica” é muito utilizada no dia a dia como sinônimo de bom senso, correção, certeza etc. Essa noção intuitiva é muito disseminada e não é totalmente falsa, pois, ao se estudar lógica, estuda-se de algum modo a noção de verdade, seja ela exposta via linguagem, via símbolos, via formalismos ou por qualquer outro processo de representação simbólica. Além disso, o dito popular “o que é verdade para um pode ser falso para outro” expressa muito bem a ideia de que a noção de verdade e seu domínio, ou foco do discurso, estão fortemente relacionados. Desse modo, o objetivo de estudos lógicos neste texto é, de algum modo, transparecer que a lógica, no sentido científico, se resume ao estudo das asserções – formalizadas via alguma linguagem – que contemplem a noção de preservação de verdade, ou seja, de verdades almeja-se ter como consequência verdades, não interessa de verdades obter falsidades.¹ Isso não elimina o lado intuitivo de bom senso, mas ajusta-o com certa precisão, de acordo com o contexto empregado. Assim, pretende-se que a busca por verdades seja traduzida pela busca por teoremas, quando se tem uma linguagem estruturada e formalizada. Essa formalização auxilia em muito no estudo das propriedades da lógica matemática e em suas interpretações e soluções de problemas da matemática e áreas afins. O dia a dia nos mostra que nem sempre se tem raciocínios em que a verdade é preservada. As formalizações que difiram desse sentido de preservação de verdade inserem-se em situações que se aproximam de raciocínios de bom senso (plausíveis). Por exemplo, sejam as frases:

- Se pular na piscina vai se molhar.

¹Não é objetivo discutir a noção de verdade em si. Os estudos filosóficos, linguísticos etc. do que seja verdade estão além do escopo deste livro.

- Pulou na piscina.
- Portanto, se molhou.

A partir das frases acima é possível concluir que esse alguém que pulou na piscina se molhou. Esse raciocínio é considerado lógico, pois preserva a verdade. Dizer de algo que é lógico no sentido da lógica matemática é dizer de raciocínios do tipo acima, aqueles em que hipóteses verdadeiras acarretam apenas conclusões verdadeiras. Eliminam-se as situações em que se tem que de hipóteses verdadeiras se concluem falsidades, o que não é compatível, à primeira vista, com a atividade matemática.² No entanto, confusões se instauram quando raciocínios plausíveis (de bom senso, de senso comum etc.) tomam o lugar dos raciocínios lógicos. Por exemplo, sejam as frases:

- Se pular na piscina vai se molhar.
- Se molhou.
- Portanto, pulou na piscina.

A conclusão esperada, não lógica no sentido exposto acima, é que esse alguém pulou na piscina. Esse é o tipo de raciocínio plausível.

Neste texto estudam-se os raciocínios lógicos (suas propriedades e teoremas), aqueles raciocínios que são formalizados assumindo a ideia de preservação da verdade. Por exemplo: “se um número inteiro é par, então é divisível por 2”. Sabe-se que divisibilidade por 2 indica resto 0 em sua divisão. Logo, é possível concluir que 5 é um número ímpar, pois deixa resto 1 na divisão por 2. Esse é um raciocínio que preserva a verdade. Nesse raciocínio leva-se em conta que “se um número não é divisível por 2, então não é par”, ou seja, de modo equivalente, “se um número não deixa resto 0 na divisão por 2, então é ímpar”.³

Exemplos aplicados à lógica matemática serão, sempre que possível, utilizados, pois entende-se que facilitam a compreensão de raciocínios lógicos. Entende-se que a diferença entre raciocínios plausíveis (aqueles que se aproximam das ideias de bom senso) e lógicos (inferências que preservam a verdade) devem sempre ser clareados. Entende-se que excursões pela matemática facilitam essa distinção.

O objetivo, na seção seguinte, é apresentar a sintaxe da linguagem da lógica proposicional clássica, analisar suas propriedades e regras de formação.

²Há situações, mesmo na matemática, em que se aceitam raciocínios plausíveis como estratégia na solução de problemas; ver [20],[30], [31].

³Neste caso, um número inteiro ou é par ou é ímpar, não existe um terceiro caso.

1.1 A linguagem \mathcal{P} da lógica proposicional clássica

Para descrever a linguagem \mathcal{P} da lógica proposicional clássica, é necessário especificar seu alfabeto e suas regras de formação. O alfabeto consiste de símbolos e as regras de formação indicam a maneira como esses símbolos podem ser trabalhados. *Grosso modo*, nesta seção investiga-se a sintaxe da linguagem.

1.1.1 Sintaxe

Definição 1.1. O alfabeto da linguagem \mathcal{P} consiste dos seguintes símbolos:

- a) Variáveis proposicionais: p_0, p_1, p_2, \dots ;
- b) Sinais de pontuação: (e);
- c) Conectivos: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$ e \leftrightarrow .

Os índices das variáveis proposicionais pertencem ao conjunto infinito de números inteiros positivos, ou seja, uma variável proposicional é do tipo p_i onde $i \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$. Os símbolos “(” e “)” são, respectivamente, os parênteses da esquerda e da direita. O nome e a leitura dos símbolos acima são dados, respectivamente, por:

símbolo	nome	leitura
\neg	negação	não
\wedge	conjunção	e
\vee	disjunção	ou
\rightarrow	condicional	se... então...
\leftrightarrow	bicondicional	... se e somente se...

Os nomes apenas auxiliam a maneira como os símbolos podem ser lidos, não se pretende com isso atribuir, neste momento, nenhum significado a eles. Uma sequência finita de símbolos do alfabeto é chamada de expressão. São expressões:⁴

- ((((((\neg ;
- $\vee p_1 \wedge p_2 \vee \vee \wedge \neg \rightarrow$;

⁴Essas expressões são apenas sequências finitas de símbolos da linguagem, não precisam denotar algum significado. O objetivo é mostrar que as regras de formação serão úteis para construir um significado para as expressões.

- p_2 ;
- $\neg\neg \rightarrow \wedge \neg\neg\neg\neg\neg$;
- $((p_5 \rightarrow p_3) \wedge)$;
- $((p_2 \rightarrow p_0) \wedge p_1)$.

Nem todas as expressões serão utilizadas na linguagem \mathcal{P} , apenas um subconjunto do conjunto das expressões chamado de conjunto das expressões bem formadas.

Definição 1.2. Seja

$$\Sigma = \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, (,)\} \cup \{p_i | i = 0, 1, 2, \dots\}$$

o conjunto dos símbolos⁵ da linguagem \mathcal{P} da lógica proposicional clássica e seja Σ^* o conjunto de todas as expressões (sequências finitas de símbolos), formadas a partir dos símbolos de Σ . Uma linguagem formal L é qualquer subconjunto de Σ^* .

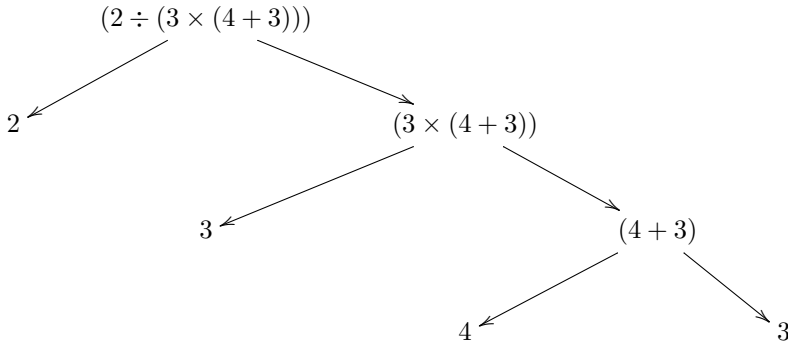
A linguagem formal a ser utilizada neste texto para a lógica proposicional clássica consiste de um subconjunto de Σ^* denominado subconjunto das expressões bem formadas (ou fórmulas) (a ser definido na sequência). Cada fórmula faz parte da linguagem formal da lógica e essas fórmulas são definidas de modo que possam ser interpretadas convenientemente. Para essas expressões bem formadas (fórmulas) é possível estabelecer intuitivamente um critério de montagem e desmontagem, desde que se saiba *a priori* sua sequência de formação. Esse critério de montagem e desmontagem assemelha-se ao estabelecido em expressões da aritmética. Por exemplo, a expressão aritmética

$$(2 \div (3 \cdot (4 + 3)))$$

pode ser desmontada de acordo com os parênteses que ocorrem na expressão,

⁵É possível trabalhar com um alfabeto finito $\Sigma = \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, (,), |\}$. Desse modo, fazem-se abreviações (definições) para representar as infinitas variáveis proposicionais da seguinte forma: p_n é por definição a letra p seguida de n barras $|$, ou seja, $p \underbrace{||| \dots}_{n}$. De modo análogo, $p_0 = p$ (p_0 é por definição p), $p_1 = p|$, $p_2 = p||$, $p_3 = p|||$, $p_8 = p|||||||$.

tal como apresentado nos cursos ginásiais.



- $(2 \div (3 \cdot (4 + 3)))$ é particionada pela divisão (\div) em 2 e $(3 \cdot (4 + 3))$;
- $(3 \cdot (4 + 3))$ é particionada pela multiplicação (\cdot) em 3 e $(4 + 3)$;
- $(4 + 3)$ é particionada pela adição ($+$) em 4 e 3.

De modo análogo, sabendo-se *a priori* qual é a expressão de origem, é possível, a partir de 4 e 3, montar $(4 + 3)$. A partir de 3 e $(4 + 3)$, montar $(3 \cdot (4 + 3))$ e, a partir de 2 e $(3 \cdot (4 + 3))$, montar $(2 \div (3 \cdot (4 + 3)))$. A expressão aritmética $(2 \div (3 \cdot (4 + 3)))$ pode ser montada a partir de 2, 3, e 4 utilizando os operadores (conectivos) $+$, \cdot e \div .

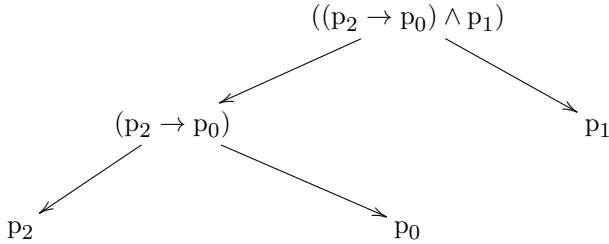
Um procedimento semelhante será aplicado às expressões de \mathcal{P} . Seja o seguinte exemplo para explicar a noção de montar e desmontar, aplicado à expressão

$$((p_2 \rightarrow p_0) \wedge p_1).$$

Neste caso, os símbolos \rightarrow e \wedge são como operadores binários da aritmética, e os símbolos p_2, p_0 e p_1 são como números na aritmética.⁶ Essa expressão pode ser desmontada e montada da seguinte maneira:

- $((p_2 \rightarrow p_0) \wedge p_1)$ é particionado pelo conectivo \wedge em: $(p_2 \rightarrow p_0)$ e p_1 ;
- Por sua vez $(p_2 \rightarrow p_0)$ é particionado pelo conectivo \rightarrow em: p_2 e p_0 .

⁶O objetivo aqui é ganhar intuição. Para uma abordagem da lógica via algoritmos, ver [22].



Em ambos os casos, para a fórmula da aritmética e para a fórmula da lógica, o processo de montar é o inverso do processo de desmontar. Os termos “montar” e “desmontar” não foram definidos, estão sendo utilizados no sentido intuitivo com o propósito de mostrar que a expressão em questão tem uma qualidade interessante na sua formação, que é o processo bem comportado de construção a partir de seus componentes. Essas expressões bem comportadas, denominadas de fórmulas, serão definidas na sequência. A seguinte definição determina de um modo preciso as expressões bem formadas.

Definição 1.3 (Fórmula). Uma expressão lógica proposicional clássica é dita ser uma fórmula⁷ se satisfizer ao menos uma das seguintes condições:

- a) Cada variável proposicional é uma fórmula;
- b) Se X é uma fórmula, então $(\neg X)$ é uma fórmula;
- c) Se X e Y são fórmulas, então $(X \wedge Y)$, $(X \vee Y)$, $(X \rightarrow Y)$ e $(X \leftrightarrow Y)$ são fórmulas.

O conjunto de todas as fórmulas de \mathcal{P} será denotado por \mathcal{F} e entende-se que é o menor⁸ conjunto que contém as fórmulas obtidas a partir dos itens a), b) e c) acima e é fechado⁹ para as operações \neg , \wedge , \vee , \rightarrow e \leftrightarrow . As fórmulas do tipo variáveis proposicionais serão denominadas fórmulas atômicas.

O alfabeto e as regras de formação já foram definidos; assim, ao se referir às expressões bem formadas que se obtêm a partir do alfabeto e das regras de formação, está se referindo à linguagem \mathcal{P} da lógica proposicional clássica.

As seguintes expressões são exemplos de fórmulas da linguagem \mathcal{P} :

1. $(p_1 \rightarrow p_2)$;

⁷Uma fórmula é uma expressão bem formada.

⁸Menor conjunto no sentido de que não há fórmulas repetidas.

⁹Isso significa que, se X e Y pertencem a \mathcal{F} , então $(X \bullet Y)$, $(\neg X)$ e $(\neg Y) \in \mathcal{F}$, onde $\bullet \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$

2. $(\neg(\neg(\neg p_1)))$;
3. $((p_2 \wedge p_3) \rightarrow p_5) \vee (p_1 \rightarrow (\neg p_2))$;
4. p_5 .

Obviamente, o conjunto \mathcal{F} de todas as fórmulas da linguagem \mathcal{P} está contido no conjunto de todas as expressões de \mathcal{P} . Toda fórmula é uma expressão, mas nem toda expressão é uma fórmula.¹⁰

Observação 1.1. A linguagem da matemática é uma linguagem formal e como tal deve ser tratada. Omitir esse adjetivo da matemática é procurar por interrogações que, em alguns casos, podem impactar no ensino de matemática de modo negativo. A expressão

$$2 + 2 \div 2$$

não é parte das fórmulas da matemática, pois torna-se uma expressão com ambigüidade. O mesmo não ocorre com expressões “genuinamente” matemáticas, tais como:

$$(2 + (2 \div 2))$$

e

$$((2 + 2) \div 2),$$

as quais não são ambíguas. Em muitos contextos a eliminação de parênteses se faz necessária com o intuito de deixar o texto mais claro e com menos símbolos. O preço que se paga por isso pode ser o aparecimento de interrogações na compreensão da linguagem da matemática. Dúvidas surgem em expressões muito simples, tais como: $x > 3$, o que às vezes é visto como diferente de $3 < x$. $\sqrt{9} = \pm 3$ é visto como correto, por fazer analogia (não formal) à expressão $x^2 = 9$, a qual tem como resposta duas raízes, ± 3 . Assim, $\sqrt{9} = 3$ é o correto, pois, por definição, a raiz quadrada tem como resultado um número positivo.

1.1.2 Parênteses

As fórmulas que contêm um número elevado de parênteses tornam-se de difícil leitura e compreensão. Adota-se uma convenção para eliminação e restauração de parênteses com o propósito de facilitar a leitura e tornar a notação menos complicada.

¹⁰A sequência de símbolos $(p \vee)$ é uma expressão, mas não é uma fórmula.

Definição 1.4. Convenções para eliminação (e restauração) de parênteses.

- a) Parênteses externos podem ser omitidos;
- b) Para partes de fórmulas com o mesmo conectivo adota-se o princípio de associação à esquerda;¹¹
- c) A seguinte ordem hierárquica de prioridade de conectivos (na colocação de parênteses) é adotada: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$.

Essas convenções não mudam a definição de fórmula, apenas servem para auxiliar a leitura e facilitar sua escrita. Por exemplo, na fórmula $(p_1 \rightarrow p_2)$ a escrita e leitura não ficam prejudicadas se os parênteses externos, item a), forem eliminados, escrevendo-se $p_1 \rightarrow p_2$. Já a expressão $p_1 \rightarrow p_2 \rightarrow p_3$ é de certo modo mais simples de visualização que a fórmula $((p_1 \rightarrow p_2) \rightarrow p_3)$ (fórmula obtida após a restauração de parênteses via item c) acima). Um mesmo conectivo nessa fórmula pode indicar ambiguidades na operação com os conectivos, a qual é evitada com a regra de associação à esquerda, item b), que significa associar parênteses, para o mesmo conectivo, da esquerda para a direita (dois a dois) no momento de sua restauração.

A fórmula $(p_1 \rightarrow (p_2 \rightarrow p_3))$ não poderia, segundo esse princípio, item b), ter todos os seus parênteses eliminados, pois, se assim fosse, ter-se-ia $p_1 \rightarrow p_2 \rightarrow p_3$. No entanto, ainda segundo o item b), a colocação de parênteses se daria da esquerda para a direita de dois em dois, ou seja, ter-se-ia a fórmula restaurada igual a $((p_1 \rightarrow p_2) \rightarrow p_3)$, a qual difere da fórmula original $(p_1 \rightarrow (p_2 \rightarrow p_3))$. Logo, a fórmula $(p_1 \rightarrow (p_2 \rightarrow p_3))$ terá apenas os parênteses externos eliminados, ou seja, torna-se $p_1 \rightarrow (p_2 \rightarrow p_3)$ após as aplicações das convenções.

O item c) afirma que, em uma fórmula sem parênteses, deve-se primeiro colocar parênteses em \neg , depois em \wedge , depois em \vee , depois em \rightarrow , e finalmente em \leftrightarrow . Seja, como exemplo, a expressão $p_1 \wedge p_2 \rightarrow \neg p_3$. Ao se restaurarem os parênteses (via item c)), tem-se $((p_1 \wedge p_2) \rightarrow (\neg p_3))$. Como outro exemplo, a fórmula $(\neg(p_1 \vee p_2))$ não poderia ter todos os seus parênteses eliminados, apenas os parênteses externos, haja vista que a eliminação de todos os parênteses produziria a fórmula $\neg p_1 \vee p_2$, que, quando da restauração, seria igual a $((\neg p_1) \vee p_2)$, a qual difere da fórmula original antes da restauração.

As convenções de eliminação de parênteses são as mesmas convenções utilizadas para restauração de parênteses.

Seja X uma fórmula qualquer e Y a fórmula que se obtém a partir de X , quando se eliminam seus parênteses, segundo as convenções acima. Pelas

¹¹Associar parênteses, para o mesmo conectivo, da esquerda para a direita (de dois em dois).