GRUPOS DE LIE

Luiz A. B. San Martin

GRUPOS DE LIE

EDITORA UNICAMP

Grafia atualizada segundo o Acordo Ortográfico da Língua
Portuguesa de 1990. Em vigor no Brasil a partir de 2009.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELO
SISTEMA DE BIBLIOTECAS DA UNICAMP
DIRETORIA DE TRATAMENTO DA INFORMAÇÃO
Bibliotecária: Maria Lúcia Nery Dutra de Castro – CRB-8ª / 1724

Sa58g San Martin, Luiz Antonio Barrera, 1955-
Grupos de Lie / Luiz A. B. San Martin. – Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2016.

1. Lie, Grupos de. 2. Lie, Álgebra de. 3. Grupos topológicos. 4. Invariantes geométricos. I. Título.

CDD – 512.55
– 512.5

ISBN 978-85-268-1356-4

Printed in Brazil.
Foi feito o depósito legal.

Direitos reservados à

Editora da Unicamp
Rua Caio Graco Prado, 50 – Campus Unicamp
CEP 13083-892 – Campinas – SP – Brasil
Tel./Fax: (19) 3521-7718/7728
www.editoraunicamp.com.br – vendas@editora.unicamp.br

Às gerações vindouras,
representadas pelos meus netos
Pedro e João.

Sumário

Apresentação

O objetivo deste livro é oferecer um texto introdutório aos grupos de Lie, apresentando a teoria a partir de seus princípios fundamentais.

O conceito de grupo se tornou um dos conceitos básicos da matemática contemporânea e de suas aplicações. Isso se deve tanto à sua simplicidade como estrutura algébrica quanto ao fato de que a ideia de simetria, num sentido amplo, é formalizada através de invariantes por grupos de transformações.

Os grupos de Lie formam uma classe especial de grupos, que são estudados por meio dos métodos do cálculo diferencial e integral. Como estrutura matemática, um grupo de Lie é a combinação da estrutura algébrica de grupo com a estrutura de variedade diferenciável. Os grupos de Lie começaram a ser estudados por volta de 1870, como grupos de simetrias de equações diferenciais e das diversas geometrias que haviam surgido até então. Desde essa época, a teoria dos grupos de Lie, ou o que se chama mais geralmente de teoria de Lie, teve um grande desenvolvimento e estabeleceu ramificações nas mais diversas áreas da matemática e de suas aplicações.

Os métodos para estudar os grupos de Lie estão baseados na construção de suas álgebras de Lie, o que foi feito inicialmente por Sophus Lie na década de 1870. (Aliás, a teoria leva o seu nome em virtude dessa construção.) Uma vez tendo a álgebra de Lie de um grupo de Lie, a ideia toda consiste em obter propriedades locais ou globais dos grupos de Lie a partir de propriedades das álgebras de Lie. Esse processo de transferência é bastante efetivo, o que permite descrever os grupos de Lie, que são objetos tipicamente não lineares, através da álgebra linear embutida nas álgebras de Lie.

Neste livro, são desenvolvidos os resultados que estabelecem a relação entre os grupos e as álgebras de Lie. Ele foi dividido em quatro partes, acrescidas de uma quinta parte constituída de apêndices.

O corpo principal da teoria dos grupos de Lie e sua classificação a partir das álgebras de Lie é desenvolvido nas partes 2 e 3. A parte 2 contém quatro capítulos, nos quais é definida a álgebra de Lie de um grupo de Lie e são demonstradas as fórmulas que relacionam, através da aplicação exponencial, o produto no grupo e o colchete de Lie na álgebra. São considerados aí também os subgrupos de Lie de um grupo de Lie e suas relações com as subálgebras de Lie, além de outros conceitos usuais da teoria de grupos, tais como homomorfismos, subgrupos normais e espaços quocientes. Os resultados da parte 2 desembocam num teorema de existência e unicidade de grupo de Lie com uma álgebra de Lie dada, com a restrição de que a unicidade vale apenas para grupos de Lie que satisfazem a propriedade topológica global de ser conexo e simplesmente conexo.

A parte 2 não exige um conhecimento de álgebras de Lie. Os poucos conceitos usados são definidos quando necessários. Ao contrário da parte 3, cujo objetivo é obter todos os grupos de Lie a partir das álgebras de Lie. Nesse ponto, os resultados mais profundos de classificação das álgebras de Lie semissimples entram de forma decisiva.

Quanto às outras partes do livro, a parte 1 considera grupos topológicos. O único capítulo dessa parte que é necessário para a leitura do restante do livro é o primeiro, que trata de propriedades topológicas de grupos. Essas propriedades são satisfeitas pelos grupos de Lie e são amplamente utilizadas. Os outros dois capítulos sobre grupos topológicos (medidas de Haar e representações de grupos compactos) estão baseados em pré-requisitos distintos do resto do livro (teoria da medida e um pouco de análise funcional) e aparecem apenas de forma marginal nos desenvolvimentos subsequentes.

Já a parte 4 trata de ações de grupos de Lie. São estudadas as órbitas de uma ação demonstrando que elas são subvariedades diferenciáveis. Além do mais, são introduzidos os conceitos de fibrado principal e fibrado associado, cujas fibras são grupos de Lie ou espaços onde agem grupos de Lie. O capítulo final é dedicado a uma introdução a uma vasta área da geometria diferencial, que estuda estruturas geométricas invariantes em espaços homogêneos.

No início de cada parte, encontra-se um resumo mais detalhado de cada uma delas. Esses resumos indicam quais os resultados principais dos diferentes capítulos e como eles se interconectam.

O livro se inicia com um capítulo introdutório, que tem o objetivo de apresentar um panorama informal das relações entre os grupos de Lie e as álgebras de Lie, incluindo uma discussão sobre a classificação dos grupos de Lie.

Como sugestão para uma primeira leitura, fica a seguinte sequência de capítulos, que apresenta os fundamentos da teoria de grupos de Lie: capítulos 2, 5, 6, 7, 8 (até a seção 8.1), 9, 10, 11 (até a seção 11.2) e 13.

Por fim, gostaria de expressar meus agradecimentos às diversas pessoas que, de alguma forma, colaboraram para que este livro fosse concluído, apresentando sugestões, apontando diversas falhas nas versões preliminares e manifestando apoio. Em particular, sou grato a todos os estudantes que participaram dos cursos de grupos de Lie na Unicamp. Agradeço em especial à colaboração de meus amigos e colegas: Alexandre Santana, Carlos Braga Barros, Caio Negreiros, Elizabeth Gasparim, Lino Grama, Lonardo Rabelo, Lucas Seco, Luciana Alves, Mauro Patrão, Osvaldo do Rocio, Paolo Piccione, Paulo Ruffino, Pedro Catuogno, Ronan Reis e Victor Ayala.

Luiz A. B. San Martin

Capítulo 1

Introdução

Este capítulo introdutório tem um caráter informal. Seu objetivo é propiciar ao leitor uma visão panorâmica da teoria desenvolvida neste livro, discutindo alguns dos resultados principais através de exemplos, os quais são ao mesmo tempo concretos e ilustrativos e por isso centrais na teoria.

A definição formal de um grupo de Lie será feita adiante no capítulo 5. Para todos os efeitos, um grupo de Lie consiste num grupo G cujo produto

$$(g, h) \in G \times G \longmapsto gh \in G$$

é uma aplicação diferenciável. Um exemplo rico o bastante para cobrir boa parte da teoria, e ao qual se deve recorrer sempre como guia, é o grupo linear geral $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$. Os elementos desse grupo são as matrizes $n \times n$ inversíveis com entradas reais, ou, o que é essencialmente a mesma coisa, as transformações lineares inversíveis de um espaço vetorial real de dimensão finita.

A seguir, serão discutidos alguns aspectos do grupo $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$. A primeira observação é que esse conjunto é um aberto do espaço vetorial das matrizes $n \times n$, isto é, de $\mathbb{R}^{n^2}$. Ele é formado por duas componentes conexas, determinadas pelo sinal do determinante. Uma delas é

$$\mathrm{Gl}^{+}(n, \mathbb{R}) = \{g \in \mathrm{Gl}(n, \mathbb{R}) : \det g > 0\},$$

que é um subgrupo de $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$. A outra componente conexa é formada pelas matrizes com determinante < 0 e não é um subgrupo.

A estrutura de grupo em $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$ é dada pelo produto usual de matrizes. Se $X = (x_{ij})$ e $Y \in (y_{ij})$ são matrizes $n \times n$, então $Z = XY = (z_{ij})$ é dado por

$$z_{ij} = \sum_{k=1}^{n} x_{ik} y_{kj},$$

que é uma aplicação polinômial de grau dois nas variáveis x_{ij}, y_{ij}. Portanto, o produto é uma aplicação diferenciável. Por essa razão, $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$ é um grupo de Lie.

A grande força da teoria dos grupos de Lie está baseada na existência das álgebras de Lie associadas aos grupos. As álgebras de Lie possibilitam transferir métodos da álgebra linear ao estudo de objetos não lineares, como são os grupos de Lie. Uma álgebra de Lie é uma estrutura algébrica por excelência. Ela é definida como um espaço vetorial $\mathfrak{g}$ munido de um produto (colchete) $[\cdot,\cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ que satisfaz as seguintes propriedades:

1. Bilinearidade, isto é, $[\cdot,\cdot]$ é linear em cada uma das variáveis ou ainda o colchete é distributivo em relação às operações de espaço vetorial.

2. Antissimetria, isto é, $[X, Y] = -[Y, X]$, para $X, Y \in \mathfrak{g}$.

3. Identidade de Jacobi: para $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$,
$$[X, [Y, Z]] = [[X, Y], Z] + [Y, [X, Z]].$$

Os elementos da álgebra de Lie de um grupo de Lie são equações diferenciais ordinárias (campos de vetores) no grupo, que satisfazem uma propriedade de simetria proveniente da estrutura multiplicativa do grupo (campos de vetores invariantes por translações, veja capítulo 5). Por sua vez, os elementos do grupo são obtidos através das soluções dessas equações dadas pelos seus fluxos. Normalmente, o espaço vetorial subjacente à álgebra de Lie de um grupo de Lie é identificado com o espaço T_1G dos vetores tangentes ao elemento neutro $1 \in G$.

Em outras palavras, a álgebra de Lie é um objeto linear que aproxima o grupo: um elemento da álgebra de Lie é dado pela derivada de uma curva no grupo. O procedimento contrário consiste em resolver equações diferenciais. Por isso, nos primeiros decênios do desenvolvimento da teoria, era empregado o termo **grupo infinitesimal** em vez de álgebra de Lie.

No caso de $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$, sua álgebra de Lie é o espaço vetorial das matrizes $n \times n$, munido do colchete dado pelo comutador de matrizes[1]
$$[A, B] = BA - AB.$$
Essa álgebra de Lie será denotada por $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$. Para estabelecer a relação entre a álgebra e o grupo, considere, para cada matriz $A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$, o campo de vetores
$$g \mapsto Ag$$
no espaço da matrizes. Esse campo induz a equação diferencial linear
$$\frac{dg}{dt} = Ag. \tag{1.1}$$
Essa equação é nada mais nada menos que o sistema linear $\dfrac{dx}{dt} = Ax$, $x \in \mathbb{R}^n$, repetido n vezes, uma vez para cada coluna da matriz g. A solução fundamental do sistema linear em $\mathbb{R}^n$ é dada por
$$e^{tA} = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} (tA)^n ,$$

[1] A ordem inversa que aparece nesse comutador deve-se à escolha dos campos invariantes à direita, a ser feita logo mais.

o que garante que a solução da equação (1.1) com condição inicial $g(0) = 1$ (onde 1 denota a matriz identidade $n \times n$) é $g(t) = e^{tA}$. Essa solução está inteiramente contida em $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$, pois as exponenciais são matrizes inversíveis. Além do mais, a curva

$$g : \mathbb{R} \to \mathrm{Gl}(n, \mathbb{R}) \qquad g(t) = e^{tA}$$

é um homomorfismo quando se considera a estrutura aditiva de grupo em $\mathbb{R}$, já que vale a fórmula $e^{(t+s)A} = e^{tA}e^{sA}$. A imagem desse homomorfismo é o que se denomina de **subgrupo a 1-parâmetro** do grupo de Lie.

Em suma, existe uma construção natural que associa a cada elemento da álgebra de Lie um subgrupo do grupo de Lie. Essa construção define a **aplicação exponencial** do grupo de Lie. Ela é básica para o desenvolvimento da teoria, pois é a aplicação exponencial que estabelece o vínculo entre o colchete na álgebra de Lie e o produto no grupo, determinando (quase que) completamente a estrutura do grupo de Lie a partir da álgebra de Lie. Esse vínculo é realizado através de fórmulas que envolvem $[\cdot, \cdot]$, exp e o produto no grupo.

Um exemplo é a **fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff** (veja capítulo 8). Essa fórmula se escreve, para X e Y na álgebra de Lie, como

$$e^X e^Y = e^{c(X,Y)},$$

onde $c(X, Y)$ é uma série (similar a uma série de Taylor), que envolve apenas X e Y e seus colchetes sucessivos. Os primeiros termos dessa série são

$$c(X, Y) = X + Y + \frac{1}{2}[X, Y] + \frac{1}{12}[[X, Y], Y] - \frac{1}{12}[[X, Y], X] + \cdots \tag{1.2}$$

e os demais termos envolvem colchetes com quatro ou mais elementos. A série $c(X, Y)$ converge se X e Y são suficientemente pequenos, mostrando que, para esses valores de X e Y, o produto $e^X e^Y$ é completamente determinado pela álgebra de Lie, isto é, pelos colchetes entre seus elementos. Isso acarreta que o produto no grupo é completamente determinado localmente, ao redor do elemento neutro, pelo colchete na álgebra de Lie.

Esse tipo de relação entre o colchete e o produto pode ser propagado a todo o grupo, permitindo mostrar que, a menos de propriedades topológicas globais (como, por exemplo, o espaço topológico subjacente ao grupo é conexo e simplesmente conexo), existe um único grupo de Lie associado a uma álgebra de Lie dada.

Outra fórmula é a expansão de Taylor do comutador de exponenciais dado pela curva

$$\alpha(t) = e^{tB}e^{tA}e^{-tB}e^{-tA} \tag{1.3}$$

no grupo linear $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$. Usando reiteradamente a derivada

$$\frac{d}{dt}e^{tA} = Ae^{tA} = e^{tA}A,$$

verifica-se que $\alpha'(0) = 0$ e

$$\alpha''(0) = 2[A, B].$$

Como $\alpha(0) = 1$, isso significa que

$$\alpha(t) = 1 + t^2[A, B] + \cdots,$$

cujo termo relevante é $[A, B]$. Isso apresenta o colchete como o objeto infinitesimal associado ao comutador no grupo. Derivadas desse tipo se estendem a campos de vetores em geral. Foi essa expansão de Taylor que levou ao conceito de colchete de Lie de campos de vetores, como é denominado hoje em dia. Esse conceito foi introduzido por Sophus Lie, o que fez com que toda teoria levasse o seu nome.

Essas fórmulas, apesar de ilustrativas da relação entre os grupos e as álgebras de Lie, não são as mais utilizadas como subsídio técnico da teoria. A passagem dos grupos de Lie às álgebras de Lie, e vice-versa, em geral se dá através das representações adjuntas definidas no capítulo 5. Essas representações fornecem fórmulas que relacionam conjugações $C_g(x) = gxg^{-1}$ no grupo, suas diferenciais $\mathrm{Ad}(g)$, que são aplicações lineares da álgebra de Lie e as diferenciais de $\mathrm{Ad}(g)$ que são dadas unicamente pelo colchete que define a álgebra de Lie. Ao aplicar essas fórmulas para passar dos grupos às álgebras de Lie, deve-se derivar duas vezes (eventualmente funções diferentes). O processo inverso, da álgebra ao grupo de Lie, envolve duas integrais, que geralmente são obtidas pelos teoremas de existência e unicidade de equações diferenciais ordinárias. A derivada segunda na expansão de Taylor da conjugação em (1.3) dá uma ideia heurística de que a passagem do grupo para a álgebra de Lie ocorre por intermédio de duas derivadas.

Outros exemplos de grupos de Lie com suas respectivas álgebras de Lie são os seguintes:

1. Se G é um grupo de Lie abeliano então sua álgebra de Lie é abeliana, isto é, o colchete $[\cdot, \cdot]$ é identicamente nulo (e vice-versa, no caso de grupos conexos, pela fórmula de Campbell-Hausdorff). Os grupos de Lie abelianos conexos serão descritos no capítulo 7, seção 7.3.

2. Seja
$$G = \mathrm{O}(n) = \{g \in \mathrm{Gl}(n, \mathbb{R}) : gg^T = g^T g = 1\}$$
o grupo das matrizes ortogonais. Sua álgebra de Lie é a subálgebra de matrizes antissimétricas:
$$\mathfrak{so}(n) = \{A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) : A + A^T = 0\}.$$
O colchete em $\mathfrak{so}(n)$ é o comutador de matrizes. A razão para isso é que A é uma matriz antissimétrica se e só se e^{tA} é uma matriz ortogonal para todo $t \in \mathbb{R}$. Isso significa que o grupo $\mathrm{O}(n)$ é uma subvariedade do espaço das matrizes cujo espaço tangente no elemento neutro 1 se identifica ao subespaço das matrizes antissimétricas.

3. O grupo $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{C})$ das matrizes complexas $n \times n$ inversíveis é um grupo de Lie pela mesma razão que $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$ o é. A álgebra de Lie $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{C})$ é dada por $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$, que é a álgebra de Lie das matrizes complexas $n \times n$.

O programa da teoria de Lie consiste em estudar os grupos de Lie através de suas álgebras de Lie, procurando descrever propriedades geométricas e algébricas dos grupos de Lie por intermédio de propriedades correspondentes das álgebras de Lie. Essa descrição deve, em última instância, abordar propriedades estruturais que permitam a classificação dos grupos de Lie em termos das álgebras de Lie. Dentro desse programa, dois conceitos da teoria de grupos abstratos desempenham um papel central. São eles, os subgrupos e os homomorfismos entre grupos. Esses conceitos são devidamente tratados por meio das álgebras de Lie e os resultados são os melhores possíveis:

1. **Subgrupos:** Se G é um grupo de Lie com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ então os subgrupos de G estão em bijeção com as subálgebras de Lie de $\mathfrak{g}$, com duas ressalvas fortes sobre os subgrupos que entram nessa bijeção. A primeira é que são considerados apenas os **subgrupos de Lie**, que são subgrupos e ao mesmo tempo subvariedades diferenciáveis, tal que as subestruturas os tornam grupos de Lie. A segunda ressalva é que a bijeção só inclui os grupos de Lie conexos. Isso porque a aplicação exponencial só vê a componente conexa do grupo de Lie que contém o elemento neutro.

   Nessa bijeção, associa-se a um subgrupo de Lie uma subálgebra de Lie tomando derivadas (duas vezes, como mencionado acima). Já no processo inverso, um subgrupo de Lie é obtido de uma subálgebra de Lie como variedade integral de uma distribuição. (Para a bijeção, veja capítulo 6. A teoria de distribuições é apresentada no Apêndice B.)

   Em relação aos sugrupos de Lie, não é possível deixar de mencionar o célebre teorema de Cartan do subgrupo fechado, que afirma que, se um subgrupo de G é um conjunto fechado, então ele é automaticamente um subgrupo de Lie.

2. **Homomorfismos:** Se $\phi : G \to H$ é um homomorfismo diferenciável entre grupos de Lie então sua diferencial $d\phi_1 : T_1G \to T_1H$ é uma aplicação linear entre os espaços tangentes nos elementos neutros, que são os espaços vetoriais subjacentes às álgebras de Lie $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$ de G e H, respectivamente. Essa aplicação linear acaba sendo um homomorfismo entre as álgebras de Lie $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$. A construção recíproca não funciona com toda a generalidade devido a restrições topológicas globais do domínio G. O que acontece é que um homomorfismo $\theta : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ dá origem a um homomorfismo local entre os grupos G e H, definido ao redor do elemento neutro de G e a valores numa vizinhança do elemento neutro de H. A única obstrução para que esse homomorfismo se estenda a todo G é o seu grupo fundamental, de tal forma que, se G é conexo e simplesmente conexo, então $\theta : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ é a diferencial de um homomorfismo $\phi : G \to H$ (veja capítulo 7).

   Um bom exemplo desse fenômeno é dado pelos grupos $(\mathbb{R}, +)$ e $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Suas álgebras de Lie são isomorfas (ambas tem dimensão 1), existem homomorfismos $\mathbb{R} \to S^1$ $(t \mapsto e^{ait})$, mas não existem homomorfismos $S^1 \to \mathbb{R}$. Ao redor dos elementos neutros, esses grupos são isomorfos.

   Esses comentários sobre homomorfismos estão em conformidade com a discussão feita acima sobre a fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff, em que se conclui que o colchete na álgebra de Lie determina o produto no grupo de Lie ao redor do elemento neutro.

Essa análise dos homomorfismos, principalmente o teorema de extensão aos grupos simplesmente conexos, dá origem à descrição de todos os grupos de Lie conexos, a partir de uma eventual classificação das álgebras de Lie. Essa descrição se resume em dois itens (veja capítulo 7):

1. Dada uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ (real de dimensão finita), existe um único grupo de Lie $\widetilde{G}$ conexo e simplesmente conexo com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. A unicidade vem do teorema de extensão mencionado acima: um isomorfismo entre as álgebras de Lie define um isomorfismo entre os grupos de Lie conexos e simplesmente conexos. A existência é provada em dois passos: (i) a construção de algum grupo de Lie G com álgebra de Lie isomorfa a $\mathfrak{g}$ (no capítulo 7 isso é feito com o auxílio do teorema de Ado, que garante que toda álgebra de Lie é isomorfa a uma subálgebra Lie de matrizes), (ii) a construção formal de uma estrutura de grupos de Lie no espaço recobrimento universal $\widetilde{G}$ de um grupo de Lie G.

2. Um grupo de Lie conexo qualquer é o quociente de um grupo de Lie simplesmente conexo $\widetilde{G}$ por um subgrupo discreto $\Gamma \subset \widetilde{G}$ contido no centro de $\widetilde{G}$.

Essa descrição funciona bem para grupos conexos, uma vez que são esses os grupos que podem ser acessados pelas álgebras de Lie, através de soluções de equações diferenciais.

Um exemplo é dado pelos grupos de dimensão 1. O grupo aditivo $(\mathbb{R}, +)$ é simplesmente conexo e sua álgebra de Lie é a única (a menos de isomorfismo) álgebra de Lie de dimensão 1. Portanto, qualquer grupo de Lie conexo e simplesmente conexo de dimensão 1 é isomorfo a $(\mathbb{R}, +)$. Um subgrupo discreto de $\mathbb{R}$ é da forma $\omega\mathbb{Z}$, com $\omega > 0$. Daí que qualquer grupo de dimensão 1 é isomorfo a $\mathbb{R}$ ou a $\mathbb{R}/\omega\mathbb{Z} \approx S^1$.

Em geral, a classificação dos grupos de Lie conexos consta de três passos: 1) classificar as álgebras de Lie reais; 2) determinar, para cada álgebra de Lie real $\mathfrak{g}$ (ou melhor, para sua classe de isomorfismo de álgebras de Lie), um grupo de Lie simplesmente conexo $\widetilde{G}$ cuja álgebra de Lie seja $\mathfrak{g}$; 3) encontrar o centro $Z\left(\widetilde{G}\right)$ de $\widetilde{G}$ e os subgrupos discretos $\Gamma \subset Z\left(\widetilde{G}\right)$.

A partir desse ponto, surge a necessidade de um desenvolvimento mais aprofundado da teoria de álgebras de Lie. Elas são divididas em duas grandes classes, as álgebras de Lie solúveis e as semissimples. O teorema de decomposição de Levi combina esses dois tipos de álgebras, através da construção do produto semidireto, para fornecer todas as álgebras de Lie de dimensão finita (veja capítulo 9). Essa decomposição das álgebras de Lie se estende ao grupos de Lie simplesmente conexos, de tal forma que tudo se reduz a determinar separadamente os grupos simplesmente conexos para as álgebras de Lie solúveis e para as semissimples.

No caso solúvel, prova-se que as variedades subjacentes dos grupos conexos e simplesmente conexos são difeomorfos a espaços euclidianos $\mathbb{R}^n$. Como é comum quando se trata de álgebras solúveis, a demonstração desse fato é feita por indução, partindo do grupo $(\mathbb{R}, +)$ de dimensão 1 (veja capítulo 10). Um exemplo típico de grupo solúvel é o grupo das matrizes triangulares superiores

$$\begin{pmatrix} a_1 & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \qquad a_1, \ldots, a_n > 0,$$

cuja variedade é difeomorfa a $(\mathbb{R}_+)^n \times \mathbb{R}^{n(n-1)/2}$.

O caso semissimples apresenta uma riqueza maior de detalhes e uma geometria mais envolvente. Ao contrário das álgebras solúveis, as álgebras de Lie semissimples reais são classificadas a ponto de ser possível distingui-las uma a uma. Um dos primeiros grandes resultados da teoria de Lie, ainda dos finais do século XIX, é a classificação por W. Killing e E. Cartan das álgebras de Lie simples complexas (e, portanto, das semissimples, que são somas diretas de simples). Essa classificação é descrita pelos diagramas de Dynkin, que estão reproduzidos no capítulo 11 (na seção 11.3.2). A classificação fornece quatro séries de álgebras de matrizes (denominadas de álgebras clássicas), que são $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ (matrizes complexas de traço zero), $\mathfrak{so}(n, \mathbb{C})$ (matrizes complexas antissimétricas divididas em duas classes, para n par ou ímpar, respectivamente) e $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{C})$ (matrizes simpléticas complexas). Além das séries, existem cinco álgebras de Lie específicas (chamadas de excepcionais), que atendem pelos seus nomes de protótipo E_6, E_7, E_8, F_4 e G_2.

A classificação das álgebras simples reais é obtida das álgebras complexas pelo processo de complexificação. As álgebras reais se dividem em dois tipos, as compactas e as não compactas.

Como indica o nome, as álgebras de Lie compactas estão ligadas aos grupos compactos (apesar de sua definição ser puramente algébrica). As álgebras reais simples estão em bijeção com as álgebras complexas simples através do chamado truque unitário de Weyl, que diz que uma álgebra simples complexa é a complexificada de uma única (a menos de isomorfismo) álgebra real compacta (veja capítulo 11). As álgebras compactas clássicas são $\mathfrak{su}(n)$ (matrizes anti-hermitianas de traço zero, que complexifica a $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$), $\mathfrak{so}(n)$ (matrizes antissimétricas, que complexifica a $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$) e $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{C})$ (matrizes quaterniônicas anti-hermitianas, que complexifica a $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{C})$). Um resultado central sobre essas álgebras é o teorema de Weyl do grupo fundamental finito, que afirma que um grupo de Lie é compacto se sua álgebra de Lie é semissimples compacta. Esse teorema permite classificar os grupos de Lie compactos, os quais são obtidos por produtos cartesianos de grupos semissimples compactos por toros (veja capítulo 11). Além do grupo $\mathrm{O}(n)$, mencionado acima (que não é conexo), outros exemplos de grupos compactos de matrizes são:

1. $\mathrm{SO}(n) = \{g \in \mathrm{O}(n) : \det g = 1\}$, com álgebra de Lie $\mathfrak{so}(n)$. Essas álgebras de Lie são simples se $n \neq 2$ e $n \neq 4$. A álgebra $\mathfrak{so}(2)$ é abeliana, enquanto $\mathfrak{so}(4)$ é semissimples e se decompõe em duas componentes simples isomorfas a $\mathfrak{so}(3)$. Os grupos $\mathrm{SO}(n)$ não são simplesmente conexos.

2. $\mathrm{SU}(n) = \{g \in \mathrm{Gl}(n,\mathbb{C}) : g\overline{g}^T = \overline{g}^T g = 1, \det g = 1\}$, com álgebra de Lie $\mathfrak{su}(n)$, que é simples para $n \geq 2$. Os grupos $\mathrm{SU}(n)$, $n \geq 2$, são simplesmente conexos.

3. O grupo $\mathrm{U}(n)$ é definido como $\mathrm{SU}(n)$, mas sem a restrição de que o determinante deve ser 1. Sua álgebra de Lie é $\mathfrak{u}(n)$ (definida como $\mathfrak{su}(n)$, sem a restrição do traço). As álgebras de Lie $\mathfrak{u}(n)$ não são semissimples.

4. $\mathrm{Sp}(n)$, com álgebra de Lie $\mathfrak{sp}(n)$. Esses grupos são simplesmente conexos. Seus elementos são dados por matrizes quaterniônicas unitárias, isto é, matrizes com entradas em $\mathbb{H}$ que satisfazem $g\overline{g}^T = \mathrm{id}$.

As álgebras simples não compactas também são classificadas (confira as tabelas no capítulo 12). Os grupos de Lie correspondentes têm a propriedade de que suas variedades subjacentes são difeomorfas ao produto cartesiano de um grupo compacto por um espaço euclidiano $\mathbb{R}^N$. Um produto destes é dado ou por uma decomposição de Cartan ou por uma decomposição de Iwasawa (veja capítulo 12). Juntando esse fato com o teorema de decomposição de Levi e a informação sobre os grupos solúveis simplesmente conexos, chega-se à conclusão de que todo grupo de Lie conexo e simplesmente conexo é difeomorfo ao produto cartesiano de um grupo de Lie compacto por um espaço euclidiano.

Alguns exemplos de grupos semissimples não compactos são listados a seguir:

1. $\mathrm{Sl}(n,\mathbb{R}) = \{g \in \mathrm{Gl}(n,\mathbb{R}) : \det g = 1\}$.

2. $\mathrm{Sl}(n,\mathbb{C}) = \{g \in \mathrm{Gl}(n,\mathbb{C}) : \det g = 1\}$.

3. $\mathrm{Sp}(n,\mathbb{R}) = \{g \in \mathrm{Gl}(2n,\mathbb{R}) : gJg^T = 1, \det g = 1\}$, onde
$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1_{n\times n} \\ 1_{n\times n} & 0 \end{pmatrix}.$$

4. $\mathrm{SO}(p,q) = \{g \in \mathrm{Gl}(p+q,\mathbb{R}) : gI_{p,q}g^T = 1, \det g = 1\}$, onde
$$I_{p,q} = \begin{pmatrix} 1_{p\times p} & 0 \\ 0 & -1_{q\times q} \end{pmatrix}.$$

5. $\mathrm{SU}(p,q) = \{g \in \mathrm{Gl}(p+q,\mathbb{C}) : gI_{p,q}\overline{g}^T = 1, \det g = 1\}$.

1.1 Exercícios

1. Encontre os três primeiros termos da fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff (1.2) para o grupo linear $\mathrm{Gl}(n,\mathbb{R})$, expandindo o produto $e^{tA}e^{tB}$ e colocando em evidência os termos t^k, $k = 0, 1, 2, 3$.