CÁLCULO

Exercícios resolvidos para os cursos de exatas e tecnológicas

UNICAMP

Universidade Estadual de Campinas

Reitor
José Tadeu Jorge

Coordenador Geral da Universidade
Alvaro Penteado Crósta

EDITORA UNICAMP

Conselho Editorial

Presidente
Eduardo Guimarães

Elinton Adami Chaim – Esdras Rodrigues Silva
Guita Grin Debert – Julio Cesar Hadler Neto
Luiz Francisco Dias – Marco Aurélio Cremasco
Ricardo Antunes – Sedi Hirano

Bárbara de Holanda Maia Teixeira
Edmundo Capelas de Oliveira

CÁLCULO

Exercícios resolvidos para os cursos de exatas e tecnológicas

EDITORA UNICAMP

Grafia atualizada segundo o Acordo Ortográfico da Língua Portuguesa de 1990. Em vigor no Brasil a partir de 2009.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELO
SISTEMA DE BIBLIOTECAS DA UNICAMP
DIRETORIA DE TRATAMENTO DA INFORMAÇÃO

T235e Teixeira, Bárbara de Holanda Maia.
Cálculo – Exercícios resolvidos para os cursos de exatas e tecnológicas / Bárbara de Holanda Maia Teixeira, Edmundo Capelas de Oliveira. – Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2014.

1. Cálculo. 2. Cálculo integral. 3. Funções (Matemática). 4. Funções diferenciais. I. Oliveira, Edmundo Capelas de, 1952- II. Título.

CDD 515.15
515.33
ISBN 978-85-268-1060-0 515.5

Índices para catálogo sistemático:

1. Cálculo	515.15
2. Cálculo integral	515.33
3. Funções (Matemática)	515.5
4. Funções diferenciais	515.5

Copyright © by Bárbara de Holanda Maia Teixeira
Edmundo Capelas de Oliveira
Copyright © 2014 by Editora da Unicamp

1ª reimpressão, 2016

Direitos reservados e protegidos pela lei 9.610 de 19.2.1998.
É proibida a reprodução total ou parcial sem autorização,
por escrito, dos detentores dos direitos.

Printed in Brazil.
Foi feito o depósito legal.

Direitos reservados à

Editora da Unicamp
Rua Caio Graco Prado, 50 – Campus Unicamp
CEP 13083-892 – Campinas – SP – Brasil
Tel./Fax: (19) 3521-7718/7728
www.editoraunicamp.com.br – vendas@editora.unicamp.br

Dedicado a
Aline de Holanda Nunes Maia
e
Ivana Mazetti Capelas de Oliveira

Sumário

Introdução

Este livro, contendo apenas exercícios resolvidos, escrito numa forma bastante objetiva e direta, visa aos estudantes dos cursos das áreas onde a disciplina cálculo, ou alguma de suas variações, se faz presente. Em particular, estudantes de arquitetura, economia, todos os cursos de exatas e tecnológicas. A preocupação que pautou a escrita do livro não está alinhada com o chamado 'método': começa-se com os exercícios mais fáceis e caminha-se passo a passo até atingir os exercícios mais elaborados, para não dizer mais difíceis. Optou-se por disponibilizar os exercícios de modo que não exista essa sequência quase que formal, e, sim, o estudante vai se deparar com o exercício e deve abordá-lo, isto é, rever, se necessário, alguns conceitos antes mesmo de resolver o exercício.

Nos dias em que a tecnologia se faz cada vez mais presente, muitos estudantes continuam achando que podem fazer quase tudo no computador ou num *tablet* qualquer. Somos partidários que uma aula à moda antiga, composta por teoria e exercícios de aplicação, a fim de sedimentar a parte teórica, é a forma mais interessante de passar um conteúdo ainda que esse tema seja, aparentemente, uma novidade. Os exercícios têm papel fundamental nesse aprendizado e são colocados para o estudante reforçar e sedimentar a parte teórica. Não temos dúvida nenhuma, quanto mais exercícios resolvidos melhor o desenvolvimento, tanto numa particular disciplina quanto na vida profissional.

Os exercícios que apresentamos neste livro têm a intenção, especificamente, de recuperar a autoestima do estudante pois, por exemplo, um estudante, digamos do curso de arquitetura, acredita que a disciplina de cálculo não lhe servirá para nada, pois o AutoCAD e outros *softwares* disponíveis são a sua salvação. Simplesmente, um engano. A presença de exercícios resolvidos é, sem dúvida, um estímulo a mais para que o estudante procure por outros mais elaborados e, em particular, nesse caso, aqueles do dia a dia, ou seja, exercícios ou problemas que estejam associados a sua profissão, após formado.

Passemos, agora, a discorrer um pouco sobre cada um dos capítulos do livro. O Capítulo 1, exclusivamente, retoma o conteúdo desenvolvido nos ensinos fundamental e médio com uma ressalva importante, a saber: é precedido por uma simples, porém não desprezível, introdução aos conceitos advindos da lógica que, infelizmente, são relegados, às vezes, até no próprio ensino superior. Ressalte-se que nesse capítulo, apesar de fazer parte do conteúdo do ensino médio, não fazemos menção explícita ao conceito de função devido, unicamente, a sua importância nos demais capítulos do livro e, portanto, merecer um destaque especial.

Devido à importância do conceito de função, o Capítulo 2 é dedicado exclusivamente ao desenvolvimento e às aplicações desse conceito. Discutimos exercícios mais fáceis e mais difíceis e, em particular, a parte envolvendo o gráfico associado a uma função do tipo linear e quadrática pois, após os conceitos de limite e derivada, a construção de gráficos não estará mais limitada a esses dois tipos. Esse capítulo desempenha papel fundamental, em particular, para o conteúdo dos Capítulos 4 e 5, onde vamos discutir os conceitos de derivada, associado ao conceito de inclinação da reta tangente a uma curva, e de integral, associado ao conceito de área, respectivamente. Ressalte-se que o Capítulo 3, dedicado ao conceito de limite, associado ao conteúdo utilizado na resolução dos exercícios do capítulo precedente, é condição indispensável para introduzirmos os conceitos de derivada e de integral.

No Capítulo 4 abordamos um particular caso de limite, aquele que está associado ao conceito geométrico de inclinação de uma reta passando por um ponto, isto é, a chamada derivada de uma função calculada num ponto. Esse conceito é de fundamental importância para discutirmos as chamadas equações diferenciais, muitas delas modelando várias situações advindas de problemas das mais diversas áreas do conhecimento. Enfim, no Capítulo 5, abordamos o conceito de integral. No caso de uma integral definida, esta está associada com uma área, conceito este de fundamental importância em várias situações, inclusive corriqueiras e do dia a dia, como, por exemplo, o cálculo da área de uma piscina de contorno elíptico.

Concluímos, diferentemente dos livros usuais, com o curto Capítulo 6 composto de apenas cinco exercícios resolvidos. A importância desse capítulo reside no fato de que o estudante poderá recuperar cada um dos resultados teóricos abordados nos capítulos anteriores, a partir de cada exercício correspondente a um dos cinco capítulo do livro. Os conceitos de função, limite, derivada e integral são dispostos em exercícios envolvendo as respectivas definições e aplicações.

Agradecimentos se fazem necessários a várias pessoas, por diversas discussões e/ou sugestões, por terem nos alertado para resoluções distintas das usuais e, principalmente, por constantes incentivos. Agradecemos aos professores doutores Waldyr Alves Rodrigues Júnior, Jayme Vaz Júnior, Lúcio Tunes dos Santos, Ary Orozimbo Chiacchio, Laura Letícia Ramos Rifo, os doutores Quintino Augusto Gomes de Souza e José Emílio Maiorino e todos aqueles que direta ou indiretamente contribuíram para a conclusão do trabalho. Agradecemos à assessoria *ad hoc* pelas sugestões. Enfim, a você leitor, a quem solicitamos nos enviar toda e qualquer sugestão de modo que a obra, numa próxima edição, possa ser melhorada.

Os autores

De que me ocuparei no céu, durante toda a eternidade, se não me derem uma infinidade de problemas de matemática para resolver?

1789 – Augustin Louis Cauchy – 1857

1 Miscelânea

Neste capítulo apresentamos uma série de exercícios contendo, em geral, material que pode ser considerado como uma pequena revisão dos tópicos abordados no ensino médio. Entretanto, como esse material visa estudantes de um curso universitário, é necessário que se introduza, ainda que muito brevemente, conceitos de lógica, visto que estes se comportam como os tijolos para a construção de toda a matemática.

Em resumo, este capítulo está disposto da seguinte maneira: apresentamos um exercício específico advindo da geometria, envolvendo o conceito de área, discutido de uma maneira praticamente ingênua. Ao final do trabalho, após o conceito de integral, abordado no Capítulo 5, devemos recuperar esse resultado, como caso particular. Depois de uma breve introdução de conceitos advindos da lógica, retornamos aos exercícios, dispostos em ordem aleatória, de modo a cobrir os temas abordados no ensino médio e que vão contribuir para o desenvolvimento dos exercícios dos demais capítulos. Os exercícios envolvendo funções serão abordados no Capítulo 2.

Exercício 1.1 Seja E a esfera de raio r e C o cilindro circular reto de altura igual ao dobro do raio da base, também r. Enchemos o cilindro de água e mergulhamos neste a esfera. Ao retirar a esfera nota-se que o cilindro permanece com sua terça parte cheia de água. Determine o volume da esfera.

Resolução

Começamos pelo que é conhecido como princípio de Arquimedes [287 a.C. – Arquimedes de Siracusa – 212 a.C.)]. Sejam V_E e V_C os volumes da esfera e do cilindro, respectivamente, logo

$$V_{\mathsf{E}} = V_{\mathsf{C}} - V_{H_2O}$$

onde V_{H_2O} é o volume de água que permanece no cilindro. Temos, para o cilindro,

$$\begin{aligned} V_{\mathsf{C}} &= \text{área da base} \times \text{altura} \\ &= \pi r^2 \times 2r = 2\pi r^3 \end{aligned}$$

enquanto

$$\begin{aligned} V_{H_2O} &= \text{área da base} \times \text{altura (nível da água)} \\ &= \pi r^2 \times \frac{2r}{3} = \frac{2\pi r^3}{3} \end{aligned}$$

de onde segue o volume da esfera

$$V_{\mathsf{E}} = 2\pi r^3 - \frac{2\pi r^3}{3} = \frac{4\pi}{3} r^3$$

unidades de volume[1].

Exercício 1.2 A partir das sentenças a seguir, explicite o que representa a hipótese e a tese, em sentenças envolvendo o binômio Se/Então, associado à questão se e somente se (SSS), bem como discuta o que se entende por condição necessária (CN), condição suficiente (CS) e condição necessária e suficiente (CNS):

a) Se dois números são pares, então sua soma é par.

b) Um número é divisível por 3 se ele é divisível por 6.

c) Se um número termina em 0, então ele é múltiplo de 5.

d) Escreva a sentença contrária da sentença direta: Um triângulo é isósceles SSS os ângulos da base são iguais.

e) O que quer dizer: p é CNS para q.

f) Qual é a negação da sentença: As duas circunferências são concêntricas?

g) Se não estamos no estado de São Paulo, então não estamos em Campinas. De acordo com essa afirmação, onde fica Campinas?

h) Introduza o conceito de sentença inversa.

Resolução

a) A hipótese é a oração que vem imediatamente após a palavra Se – dois números são pares. É uma CS. Por outro lado, a conclusão é a oração que

[1]Após o conceito de integral, abordado no Capítulo 5, vamos recuperar esse resultado, mostrando-o analiticamente.

segue a palavra então – sua soma é par. É uma CN. Convém ressaltar que a hipótese é uma sentença independente da palavra Se, assim como também o é a conclusão, independente da palavra então.

b) Aqui, a hipótese é: ele é divisível por 6, que é a oração que se segue à palavra Se. É CS. Por outro lado, a conclusão é: O número é divisível por 3, que é uma CN.

c) Note que essa afirmação é verdadeira. A hipótese é uma CS para a conclusão porque a afirmação é verdadeira.

d) Antes de discutirmos essa sentença, devemos definir o que se entende por sentença contrária. Uma outra maneira de as sentenças aparecerem, diferentemente da forma direta, é na chamada forma contrária, isto é, onde temos a permuta entre hipótese e conclusão. O contrário de Se p, então q, onde p e q são sentenças, é Se q, então p. Note que, se uma sentença Se-então é verdadeira, sua sentença contrária não é necessariamente verdadeira. Em nosso caso, a afirmação "Um triângulo é isósceles SSS os ângulos da base são iguais" tem o seguinte significado: na forma do binômio, a sentença direta é: Se um triângulo é isósceles, então os ângulos da base são iguais, enquanto sua sentença contrária é: Se os ângulos da base são iguais, então o triângulo é isósceles.

e) No caso em que ambas as sentenças direta e contrária são verdadeiras, dizemos p SSS q. Em outras palavras, p é necessário e suficiente para q.

f) O conceito de contradição é também conhecido pelo nome de negação. Se a é uma afirmação, então sua contradição é uma afirmação que é equivalente a dizer: Não é verdade a, e será denotado por Não-a. Em nosso caso, a negação é a sentença: As duas circunferências não são concêntricas. Note que uma das afirmações deve ser necessariamente verdadeira enquanto a outra, necessariamente falsa.

g) Deve ser em São Paulo. Porque se você está em qualquer lugar – Não em Campinas –, então de acordo com a afirmação você não está em Campinas. Em outras palavras, Se você está em Campinas, então você está no estado de São Paulo. Isso tem a forma: Se a, então b. Por outro lado, a afirmação Se você não está no estado de São Paulo, então você não está em Campinas, tem a forma Se não-b, então não-a. Chamamos isso de contraposição de Se a, então b. As hipóteses e a conclusão são trocadas e contraditas. Dizemos que uma afirmação e sua contraposição são logicamente equivalentes. Essa é uma maneira técnica de dizer que tanto a afirmação quanto a sua contraposição têm o mesmo significado. Elas serão ou ambas verdadeiras ou ambas falsas, isto é, não temos um meio termo.

h) A contradição de ambas, a hipótese e a conclusão, leva o nome de inversa. A inversa de Se a, então b é Se não-a, então não-b.

Exercício 1.3 Através de um exemplo, discuta o que é chamado de Argumento válido, que tem como protótipo o que é conhecido pelo nome de silogismo[2].

Resolução

Sejam as sentenças: 1. Todos os homens são mortais; 2. Sócrates é homem; 3. Então, Sócrates é mortal. As afirmativas 1 e 2 são as hipóteses. A afirmativa 3 é a conclusão. Equivalentemente, Se todos os homens são mortais, e Sócrates é um homem, então Sócrates é mortal. O que carateriza esse fato ou qualquer argumento válido é o seguinte: Se a hipótese é verdadeira, então a conclusão deve ser verdadeira.

Se a classe de coisas chamada "**H**omens" são todos os membros da classe chamada "**M**ortais", e Sócrates é um membro de "**H**omens", então Sócrates necessariamente deve ser um membro de "**M**ortais".

A essência desse argumento é da forma que se segue:

1. Todos de **H** são de **M**.
2. x é um **H**.
3. Então, x é um **M**.

Atenção! Aqui também temos um ponto extremamente importante e que merece ser destacado, a saber: Uma hipótese falsa pode levar a uma conclusão verdadeira. Em outras palavras, a verdade de uma conclusão não garante a verdade de sua hipótese. Isso é fundamental para todo argumento, para todas teorias fundamentadas em lógica, e especialmente para a filosofia da natureza, que atende pelo nome de ciência.

Exercício 1.4 Demonstrar é preciso. Formular o que se entende por axioma, conjectura e teorema, visando a algumas das maneiras de fazer uma demonstração, isto é, demonstrar.

Resolução

O binômio Se-então desempenha um papel fundamental, em particular quando discutimos sentenças matemáticas. Essas sentenças podem ser afirmações verdadeiras ou falsas. Na matemática, dizemos que uma afirmação é verdadeira se ela for sempre verdadeira ou ainda irrefutável [5 é um número ímpar], sem exceção. Se pudermos demonstrar a condição que leva da hipótese à conclusão, dizemos que o binômio é chamado de teorema. Então, um teorema é uma proposição cuja prova é possível de ser efetuada. Por outro lado, uma proposição que é apenas admitida como verdadeira e que não requer uma prova é conhecida pelo nome de axioma. Enfim, uma proposição que ainda não foi provada (e nem refutada) é chamada conjectura. Os axiomas não requerem provas, são admitidos

[2]Silogismo. Segundo o aristotelismo, raciocínio dedutivo estruturado formalmente a partir de duas proposições, ditas premissas, das quais, por inferência, se obtém necessariamente uma terceira, chamada conclusão.

como verdadeiros; os teoremas admitem uma demonstração enquanto as conjecturas necessitam ser demonstradas, em particular, a partir de algo previamente conhecido. Em resumo, demonstrar um teorema é demonstrar que a implicação é uma tautologia[3]. Aqui, vamos abordar alguns particulares modos de demonstrar seja um teorema (admitido) seja uma conjectura (possibilidade de vir a ser um teorema), dentre eles: exaustão, direto, contraposição e por absurdo. Existem várias maneiras de tentar demonstrar uma conjectura que, dependendo do problema em questão, requeira uma habilidade específica; por exemplo, abordando o problema de modo direto, porém não existe uma regra geral de fazê-lo. Dizemos que uma afirmação é verdadeira se ela for sempre verdadeira ou ainda irrefutável, sem exceção; basta encontrar um contraexemplo para afirmar que a conjectura (ou o teorema) é falsa.

Exercício 1.5 Método de exaustão. Provar a conjectura: Se um inteiro entre 19 e 52 é divisível por 10, então também é divisível por 5.

Resolução

Esse modo de abordar uma demonstração está direcionado para os casos em que temos um problema envolvendo coleções finitas de elementos. A prova está baseada na verificação da validade para todos os elementos da coleção, sem exceção. Como já afirmamos, em não valendo para um deles, dizemos que a conjectura é falsa. O nome exaustão advém do fato de que exaurimos todos os casos possíveis. Note-se que provar a falsidade através de um contraexemplo sempre funciona; provar através de um exemplo particular quase nunca funciona. Uma exceção fica por conta da conjectura, que é uma asserção sobre uma coleção finita. Essa é uma conjectura que se encaixa no "termo" coleções finitas. A oração (sentença matemática) imediatamente após a palavra Se, isto é, um inteiro entre 19 e 52 é divisível por 10, se constitui na hipótese enquanto a oração (sentença matemática) imediatamente após a palavra então, isto é, também é divisível por 5, se constitui na conclusão, ou seja, a tese que desejamos provar. Podemos, por exemplo, provar a conjectura, uma vez que existe um número finito de casos, mostrando que é verdadeira para todos os inteiros entre os números 19 e 52, através de uma tabela. Como mencionado, temos um número finito de elementos entre os números 19 e 52 e, em particular, aqueles que satisfazem a hipótese; são: 20, 30, 40 e 50 (número finito de elementos). Ora, como um número divisível por 10 é divisível por 5, verificamos que todos (exaurir os elementos), 20, 30, 40 e 50, são divisíveis por 5. Logo, está provada a conjectura.

Exercício 1.6 Demonstração direta. Prove a conjectura: A soma de dois números inteiros consecutivos é ímpar.

[3]Proposição analítica que permanece sempre verdadeira, uma vez que o atributo é uma repetição do sujeito. Redundância, pleonasmo.

Resolução

Essa é a maneira clássica de efetuar uma demonstração, isto é, no sentido de que se parte da hipótese, admitida verdadeira, e provamos ser verdadeira a tese. Comecemos por escrever a sentença utilizando o binômio Se-então. Se n e m são dois números inteiros consecutivos, então $n+m$ é um número ímpar. Admitamos, primeiramente, que n é par, logo, como consequência, m é ímpar. Se n é par podemos escrever $n = 2\ell$, onde ℓ é um número inteiro qualquer, enquanto se m é ímpar podemos escrever $m = 2k + 1$, onde k é um inteiro qualquer. Calculemos a soma $n + m$

$$n + m = 2\ell + (2k + 1) = 2(\ell + k) + 1.$$

Visto que $\ell + k$ é um número inteiro, temos que $2(\ell + k)$ é um número par, logo $2(\ell + k) + 1$ é um número ímpar, o que prova a conjectura. Convém ressaltar que, se tivéssemos partido da hipótese que n é um número ímpar, o procedimento seria exatamente o mesmo.

Exercício 1.7 Contrapositiva. Seja $n \in \mathbb{N}$. Prove o seguinte teorema:

$$n! > (n + 1) \quad \text{para} \quad n > 2.$$

Resolução

Essa demonstração está baseada no conceito de tautologia. Se a demonstração direta Se-então não foi conseguida, tenta-se alguma variante da demonstração direta. Assim, se for possível provar a respectiva sentença contrapositiva, por tautologia provamos a sentença direta. Em resumo, Se p então q não puder ser provada diretamente mas pudermos provar Se não-q então não-p, que é a contrapositiva de Se p então q, pode-se concluir que Se p então q usando a tautologia Se não-q então não-$p \rightarrow$ Se p então q. Assim, basta mostrar por contraposição, que para $n \leq 2$ vale a desigualdade $n! \leq (n + 1)$. Note que as sentenças direta e a respectiva contrapositiva são:

Sentença Direta $(n \in \mathbb{N})$	Contrapositiva $(n \in \mathbb{N})$
Se $n > 2$, então $n! > (n + 1)$	Se $n \leq 2$, então $n! \leq (n + 1)$

Ora, é mais fácil provar a sentença contrapositiva, em particular, através de uma tabela onde testamos apenas os valores de n iguais a 0, 1 e 2, que mostra o teorema.

Exercício 1.8 Demonstração por absurdo. Prove que $\sqrt{2}$ não é um número racional.

Resolução

Queremos demonstrar uma tese, a partir das hipóteses, cuja demonstração direta não é aparentemente simples. Então supõe-se a não-tese e mostra-se que a não-tese leva a um absurdo, de onde se conclui que a tese é verdadeira. Em outras palavras, primeiro admitir como verdade o contrário daquilo que se quer provar e, segundo, efetuar manipulações até chegar a uma contradição. Com isso, conclui-se a prova, isto é, chegar a um absurdo. Esse exemplo é a clássica demonstração da irracionalidade da raiz quadrada de dois. Começamos por lembrar que um número é racional quando pode ser colocado na forma p/q, com p e q inteiros, e p e q não têm fatores comuns, exceto ± 1 e $q \neq 0$. Primeiramente, vamos negar a tese, isto é, admitir que $\sqrt{2}$ é um número racional. Então $\sqrt{2} = p/q$, de onde, elevando ao quadrado, podemos escrever a igualdade $2q^2 = p^2$. Dessa expressão conclui-se que 2 divide p^2, logo, como o próprio 2 é indivisível, 2 tem que dividir p. Ora, 2 é um fator de p, de onde 4 é um fator de p^2 e a equação $2q^2 = p^2$ pode ser escrita como $2q^2 = 4x$ ou ainda na forma $q^2 = 2x$. Então 2 divide q^2, logo 2 divide q. Ora, então 2 é um fator de p e de q, o que contradiz a asserção de que p e q não têm fatores comuns, isto é um absurdo. Concluímos, portanto, que $\sqrt{2}$ não é um número racional.

Exercício 1.9 Princípio de indução finita. Utilize o princípio de indução finita para provar que

$$\sum_{n=1}^{k} n^2 \equiv 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 = \frac{k}{6}(k+1)(2k+1), \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Resolução

Esse princípio é uma maneira de efetuar uma demonstração, apesar de ser eficiente para uma classe particular de problemas, os que envolvem números inteiros. É bastante útil na demonstração de vários problemas associados a contagem, advindos da análise combinatória, dentre outros.

Definição. Seja $P(k)$ uma propriedade relativa aos números inteiros. Se

(i) $P(k)$ é verdadeira para $k = 1$ e
(ii) $P(n)$ verdadeira implica $P(n+1)$ é verdadeira

então $P(k)$ é verdadeira para todo inteiro $k \geq 1$.

Primeiramente, vamos verificar que essa expressão é válida para $k = 1$. [Na verdade poderíamos ter escolhido um inteiro qualquer. Há autores que escolhem o zero.] Substituindo $k = 1$ na expressão temos

$$1^2 = \frac{1}{6}(1+1)(2 \cdot 1 + 1) = 1.$$

Agora, supomos, por hipótese, que essa expressão é válida e queremos provar que

$$1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)}{6}\left[(k+1)+1\right]\left[2(k+1)+1\right],$$

isto é, no lugar de k colocamos $k+1$. A fim de efetuar a demonstração, rearranjamos a expressão anterior na forma

$$[1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2]+(k+1)^2=\frac{(k+1)}{6}(k+2)(2k+3),$$

ou ainda, na seguinte forma

$$[1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2]+(k+1)^2=\frac{k}{6}(k+1)(2k+1)+(k+1)^2.$$

Note que a soma até o termo k^2 é, por hipótese, conhecida. Reescrevendo a expressão anterior, até o termo $k+1$, obtemos

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2+(k+1)^2=(k+1)\left[\frac{k}{6}(2k+1)+(k+1)\right].$$

O segundo membro da expressão anterior pode ser escrito, após a fatoração do trinômio quadrado, na forma

$$(k+1)(2k^2+7k+6)/6=(k+1)(k+2)(2k+3)/6.$$

Ora, o segundo membro da expressão anterior é exatamente o resultado da soma, isto é, aquilo que queríamos demonstrar.

Exercício 1.10 Denota-se, em analogia ao conjunto dos números inteiros, o conjunto dos racionais, sem o zero, por $\mathbb{Q}^*$; enquanto $\mathbb{Q}_+$ e $\mathbb{Q}_-$ são, respectivamente, o conjunto dos racionais não negativos e o conjunto dos racionais não positivos. Justifique, através de um contraexemplo (um exemplo que não satisfaz à igualdade), que não vale nenhuma das igualdades a seguir:

a) $\mathbb{Z}=\mathbb{Q}_+$; b) $\mathbb{N}=\mathbb{Q}^*$; c) $\mathbb{Z}_+=\mathbb{Q}_+$.

Resolução

a) Denotemos por x um número qualquer. Sendo $x=1/2$, um número racional que não é inteiro. b) Seja $x=-2$, que é um número racional não positivo (inteiro não positivo) porém não é natural. c) Sendo $x=2/3$, um número racional não negativo porém não é inteiro.

Exercício 1.11 Dê um exemplo de um conjunto unitário, isto é, somente um elemento, e de um conjunto vazio, isto é, não contendo nenhum elemento.

Resolução

A interseção de duas retas r e s é o ponto P (o conjunto unitário P) e escreve-se $r\cap s=\mathsf{P}$ ou $r\cap s=\{\mathsf{P}\}$. O conjunto $A=\{x\in\mathbb{N}:2<x<3\}$ é vazio pois não temos nenhum natural que satisfaça essa dupla desigualdade.

Exercício 1.12 Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ dois conjuntos. Afirma-se que todo elemento do conjunto $\mathcal{A}$ é também elemento do conjunto $\mathcal{B}$. a) Escreva essa afirmação em termos de conjuntos. b) Discuta os casos extremos.

Resolução

a) Existe mais de uma maneira de formalizar essa afirmação, a saber: O conjunto $\mathcal{A}$ é um subconjunto do conjunto $\mathcal{B}$, ou ainda, o conjunto $\mathcal{A}$ está contido no conjunto $\mathcal{B}$, ou ainda, o conjunto $\mathcal{A}$ é parte do conjunto $\mathcal{B}$. b) São dois os casos extremos, a saber: para todo conjunto $\mathcal{A}$ temos $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}$, isto é, o conjunto $\mathcal{A}$ está contido nele mesmo e $\varnothing \subset \mathcal{A}$, isto é, o conjunto vazio é subconjunto de qualquer outro conjunto.

Exercício 1.13 Discuta o Ex.1.3 em termos da linguagem de conjuntos.

Resolução

Lembremos do silogismo aristotélico. Todo ser humano é um animal, todo animal é mortal, logo todo ser humano é mortal. Na linguagem de conjuntos tem-se: Sejam $\mathcal{H}, \mathcal{A}$ e $\mathcal{M}$, respectivamente, os conjuntos dos seres humanos, dos animais e dos mortais. Assim, podemos escrever,

$$\mathcal{H} \subset \mathcal{A} \quad \text{e} \quad \mathcal{A} \subset \mathcal{M} \qquad \Longrightarrow \qquad \mathcal{H} \subset \mathcal{M}.$$

Exercício 1.14 a) Defina o conjunto das partes. b) Seja dado o conjunto $\mathcal{X} = \{0, 1, 2\}$. Escreva explicitamente o conjunto das partes, denotado por $\mathfrak{P}(\mathcal{X})$.

Resolução

a) Seja dado o conjunto $\mathcal{X}$. Chama-se conjunto das partes de $\mathcal{X}$, denotado por $\mathfrak{P}(\mathcal{X})$, o conjunto cujos elementos são as partes de $\mathcal{X}$, isto é, $\mathcal{A} \in \mathfrak{P}(\mathcal{X})$, que é o mesmo que $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$. b) Devemos explicitar todos os subconjuntos de $\mathcal{X}$, de onde se segue

$$\mathfrak{P}(\mathcal{X}) = \{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0,1\}, \{0,2\}, \{1,2\}, \{0,1,2\}\}.$$

Convém ressaltar a diferença do tratamento de elemento com conjunto e conjunto com conjunto. Note que $\{1, 2\} \in \mathfrak{P}(\mathcal{X})$, isto é, o elemento $\{1, 2\}$ pertence ao conjunto das partes. Por outro lado, $\{1, 2\} \subset \mathcal{X}$, isto é, o conjunto $\{1, 2\}$ é um subconjunto do conjunto $\mathcal{X}$. Enfim, note também que o conjunto vazio é sempre um elemento do conjunto das partes.

Exercício 1.15 Uma conexão com a breve introdução à lógica. Sejam P e Q propriedades que se referem a elementos de um certo conjunto $\mathbb{E}$, de tal modo que as propriedades P e Q definam subconjuntos $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ de $\mathbb{E}$, isto é,

$$\mathcal{X} = \{x \in \mathbb{E} : x \text{ goza de } \mathsf{P}\} \quad \text{e} \quad \mathcal{Y} = \{y \in \mathbb{E} : y \text{ goza de } \mathsf{Q}\}.$$

Discuta: a) condição necessária e condição suficiente; b) condição necessária e suficiente, e o se, e somente se.

Resolução

a) As afirmações P implica Q; se P, então Q; P acarreta Q; P é CS para Q e Q é CN para P têm todas o mesmo significado, querendo dizer que $\mathcal{X} \subset \mathcal{Y}$, ou seja, que todo objeto que goza de P também goza de Q e a notação é P $\Longrightarrow$ Q, isto é, P implica Q.

b) As afirmações P SSS Q e P é CNS para Q têm o mesmo significado e querem dizer que P $\Longrightarrow$ Q e Q $\Longrightarrow$ P, ou seja, o conjunto $\mathcal{X}$ dos elementos que gozam da propriedade P coincide com o conjunto $\mathcal{Y}$ dos elementos que gozam da propriedade Q, cuja notação é P $\Longleftrightarrow$ Q.

Exercício 1.16 Seja $\mathbb{N}$ o conjunto dos números naturais e as propriedades P e Q, a seguir, referidas aos elementos genéricos $x \in \mathbb{N}$ e $y \in \mathbb{N}$

P – x é divisível por 6 e Q – y é divisível por 3

Essas propriedades definem os seguintes subconjuntos do conjunto dos naturais $\mathbb{N}$, isto é, $\mathcal{X} \subset \mathbb{N}$ e $\mathcal{Y} \subset \mathbb{N}$, onde

$$\begin{aligned} \mathcal{X} &= \{x : x = 6k, k \in \mathbb{N}\} \\ \mathcal{Y} &= \{y : y = 3k, k \in \mathbb{N}\} \end{aligned}$$

Assinale a(s) alternativa(s) verdadeira(s).

a)	P implica Q	k)	Q implica P
b)	se P, então Q	l)	se Q, então P
c)	P acarreta Q	m)	Q acarreta P
d)	P é CS para Q	n)	Q é CS para P
e)	Q é CN para P	o)	P é CN para Q
f)	P SSS Q	p)	Q SSS P
g)	P CNS Q	q)	Q CNS P
h)	P $\Longrightarrow$ Q	r)	Q $\Longrightarrow$ P
i)	P $\Longleftrightarrow$ Q	s)	Q $\Longleftrightarrow$ P
j)	$\mathcal{X} \subset \mathcal{Y}$	t)	$\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$

Resolução

Apenas as alternativas f, g e i não são verdadeiras.

Exercício 1.17 A reunião (ou união) de dois conjuntos $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, denotada por $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$, é o conjunto formado pelos elementos de $\mathcal{A}$ mais os elementos de $\mathcal{B}$ (pelos elementos de $\mathcal{B}$ mais os elementos de $\mathcal{A}$), isto é,

$$\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \{x : x \in \mathcal{A} \;\text{ ou }\; x \in \mathcal{B}\}.$$

Se $x \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ significa dizer que pelo menos uma das afirmações a seguir é verdadeira: $x \in \mathcal{A}$ ou $x \in \mathcal{B}$. Determine a união dos conjuntos $\mathcal{A} = \{x \in \mathbb{N} : x \geq 6\}$ e $\mathcal{B} = \{x \in \mathbb{N} : x \leq 10\}$.