MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Aloisio Ernesto Assan

MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS
Primeiros passos

3ª edição revista e ampliada

EDITORA UNICAMP

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELO
SISTEMA DE BIBLIOTECAS DA UNICAMP
DIRETORIA DE TRATAMENTO DA INFORMAÇÃO

As72m Assan, Aloisio Ernesto
Método dos elementos finitos: primeiros passos / Aloisio Ernesto Assan. – 3ª edição revista e ampliada – Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2020.

1. Método dos elementos finitos. 2. Teoria das estruturas. 3. Mecânica dos sólidos. I. Título.

CDD 515.353
624.171
620.105

ISBN 978-85-268-1517-9

1ª edição, 1999
2ª edição, 2003

Printed in Brazil.
Foi feito o depósito legal.

Editora da Unicamp
Rua Sérgio Buarque de Holanda, 421 – 3º andar
Campus Unicamp
CEP 13083-859 – Campinas – SP – Brasil
Tel.: (19) 3521-7718 / 7728
www.editoraunicamp.com.br – vendas@editora.unicamp.br

À minha esposa e aos meus filhos.

Não se deve o avanço da ciência ao fato de que se acumulam experiências perceptivas em número crescente no decorrer do tempo. Nem se deve o avanço da ciência ao fato de cada vez mais faríamos melhor uso de nossos sentidos. Não se pode destilar a ciência a partir das experiências dos sentidos não interpretadas, por mais industrioso que seja o modo pelo qual as escolhamos e selecionamos. Nosso único meio de interpretar a natureza são as idéias audazes, as antecipações injustificadas e o pensamento especulativo: estes são nosso único *organon*, nosso único instrumento para captá-la. E devemos arriscá-los para conseguir o prêmio. Aqueles de nós que não estão dispostos a expor suas idéias ao risco da refutação não tomam parte no jogo da ciência.

Karl Raimund Popper

Sumário

Prefácio

A motivação para escrever um texto didático sobre o método dos elementos finitos, destinado a alunos dos cursos de graduação em engenharia e àqueles que estejam iniciando-se na pós-graduação, foi a escassez de livros em português sobre este tema.

Os assuntos são abordados da forma como são ministrados na disciplina *Introdução ao método dos elementos finitos* do curso de graduação da Faculdade de Engenharia Civil da Unicamp e têm basicamente o mesmo conteúdo de vários outros livros sobre elementos finitos dos quais alguns são citados nos Apêndices A e B.

Portanto não houve a pretensão de escrever um trabalho original, no sentido de introduzir novidades ao assunto.

Procurou-se escrever em linguagem simples e acessível a alunos que tenham conhecimento do cálculo diferencial e integral e da mecânica das estruturas ensinados nos cursos de graduação.

No Capítulo 1, faz-se uma abordagem histórica resumida da evolução do método dos elementos finitos.

No Capítulo 2, apresenta-se o cálculo variacional, introduzindo a noção de funcional tomando como comparação o cálculo diferencial e integral que já é do conhecimento dos leitores.

O Capítulo 3, traz os métodos de Rayleigh-Ritz e Galerkin, precurssores do método dos elementos finitos, expondo a teoria acompanhada de exercícios resolvidos, preparando o leitor para assimilar com mais facilidade o método dos elementos finitos.

O método dos elementos finitos propriamente dito começa a ser visto no Capítulo 4, no qual é abordado o elemento unidimensional e mostrado como são determinados sua matriz de rigidez e seus vetores de cargas nodais equivalentes.

Dedica-se o Capítulo 5 ao elemento finito unidimensional empregado na análise de pórticos planos. Nesse capítulo, desenvolvem-se a matriz de rigidez e vetores de cargas nodais equivalentes para o referido elemento finito.

Os elementos finitos bidimensionais são vistos no Capítulo 6. Vários elementos triangulares e retangulares têm suas matrizes de rigidez e vetores de cargas nodais equivalentes explicitamente apresentados. Aí mostram-se vários exemplos comparando o comportamento dos elementos finitos expostos.

Lá, também, mostram-se os requisitos para convergência dos elementos finitos baseados no modelo de deslocamentos.

No Capítulo 7, são tratados os elementos isoparamétricos.

Os problemas de campo são vistos no Capítulo 8. Aqui também são resolvidos diversos exemplos com valores obtidos por meio de programas de computador desenvolvidos por este autor.

As referências bibliográficas estão no Apêndice A. No Apêndice B, desenrola-se uma extensa lista de livros sobre o método dos elementos finitos, propiciando ao leitor outras fontes de estudo e pesquisa.

O Apêndice C apresenta de forma ampla a integração de funções em domínios triangulares e retangulares. São mostradas as integrações aproximadas de Gauss-Legendre e Lobatto e as integrações exatas para domínios triangulares como consta da literatura usual.

O Apêndice D contém a representação geométrica do Jacobiano.

Os programas-fonte dos cinco *softwares* desenvolvidos pelo autor: FRAME.FOR, PLANAR.FOR, TORQ.FOR, TORT.FOR e FLUIT.FOR, respectivamente para análise de pórticos planos, estudo de problemas de estados planos de tensão e deformação, de torção com elemento finito quadrilateral, de torção de barras com elemento finito triangular e de escoamento irrotacional de fluido com elemento finito triangular e os arquivos de dados dos diversos exemplos que ilustram este livro estão disponíveis e podem ser copiados no endereço da INTERNET: *http://www.fec.unicamp.br/˜assan/*.

Há muitas pessoas a quem devo agradecer pela cooperação na elaboração deste livro. O apoio e incentivo da minha esposa e filhos foi essencial para que isso ocorresse. A paciência, compreensão e resignação que sempre tiveram vendo-me sentado diante do computador digitando, desenhando e elaborando os programas permitiram que eu terminasse este trabalho. A eles sou muitíssimo agradecido.

Vários colegas colaboraram na revisão do texto, melhoraram-no com sugestões e contribuíram para o aprimoramento do livro e de meus conhecimentos. Aos alunos do curso de engenharia civil da Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo da Unicamp Sidney Kitadani Satake e Jeferson Cassiano, bolsistas de iniciação científica da Fapesp, sob minha orientação, agradeço pela colaboração na conferência de alguns exemplos dos Capítulos 6 e 8.

Obrigado aos professores-doutores da Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo da Unicamp: Francisco Antonio Menezes, Pérsio Leister de Almeida Barros, Isaias Vizotto, Mario Conrado Cavichia e Renato Soliani. Aos dois primeiros, dois mágicos da computação que fazem o que apenas sonho em fazer, pela inestimável ajuda na edição deste livro e responsáveis pela presença das duas últimas figuras no exercício 4 do Capítulo 8. Ao Isaias por ter utilizado parte de alguns capítulos, quando ainda o texto estava em fase de elaboração, na discilplina eletiva *Introdução ao método dos elementos finitos* ministrada na Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo da Unicamp, o que permitiu que mais pessoas pudessem colaborar na melhoria do conteúdo e na revisão do texto. Aos dois últimos pela paciência com que me ouviram e pelas sugestões, sobretudo no primeiro capítulo.

Externo um agradecimento especial ao professor-doutor Walter Savassi,

hoje aposentado pela Escola de Engenharia de São Carlos da USP, com quem tive o privilégio de trabalhar na ministração de aulas das disciplinas *Resistência dos Materiais* na Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo da Unicamp, ainda em Limeira, que, como meu orientador no doutorado, conduziu-me em meus primeiros passos pelo método dos elementos finitos.

Prefácio à 2ª edição

O objetivo da segunda edição do livro Método dos Elementos Finitos foi o de apresentar elementos finitos com formulações diversas e comparar, entre eles, os resultados obtidos na análise de vários tipos de estruturas, mostrando aos leitores como a introdução de novos parâmetros e de hipóteses nas suas formulações melhora as soluções obtidas, quando comparadas com valores teóricos, que são considerados “valores exatos”.

Além disso, dois novos capítulos foram incluidos: um abordando a análise de placas elásticas e outro introduzindo a análise dinâmica em barras e placas.

Todos os resultados dos exemplos apresentados no livro foram obtidos pelo autor com programas elaborados por ele, com a finalidade de incentivar os leitores a desenvolver seus próprios programas, realizando trabalhos de iniciação científica ou de final de curso. Essa atividade ajuda a analisar com maior firmeza os resultados obtidos com programas comerciais, quando são utilizados elementos finitos diferentes do mesmo elemento estrutural.

Os Capítulos 1, 2, 3, 4, 7 e 8 foram mantidos. O Capítulo 5 foi praticamente todo reescrito, com a introdução de elementos de treliça e de arco, elementos de viga e de arco com rótulas e de viga sobre base elástica. Neste capítulo também foram introduzidos elementos finitos de viga e de arco formulados com a teoria de Timoshenko, que leva em consideração o efeito das deformações de cisalhamento na obtenção das matrizes de rigidez e de massa.

O Capítulo 6 sofreu alterações, principalmente na apresentação das matrizes de rigidez e dos vetores de cargas, além da inclusão de elementos de interface. Aumentou-se o número de exemplos e de análises dos resultados.

No Capítulo 9 encontra-se a análise de placas elásticas. Inicialmente apresenta-se um resumo da teoria de placas finas isotrópicas e em seguida são apresentados os elementos finitos. O primeiro é o denominado elemento básico por tratar-se de um elemento retangular com 4 nós e 3 graus de liberdade por nó (dois deslocamentos e uma rotação). Em seguida, vem um elemento finito triangular com 6 nós e 21 monômios que formam um polinômio completo do quinto grau nas váriáveis x e y, razão pela qual foi chamado de T21. Por consequência esse elemento tem nós nos vértices e 1 nó no meio de cada lado. Os graus de liberdade são: o deslocamento transversal, as duas rotações em x e em y, e as três curvaturas, totalizando 21 graus de liberdade.

Posteriormente esse elemento é transformado no T18 com a eliminação dos nós internos aos lados. Com esse elemento pode-se impor as condições de contorno de deslocamentos e de esforços, por conter as três derivadas segundas do deslocamento (as curvaturas). São apresentados exemplos comparando os resultados dos elementos básico e T18 para placas retangulares e esconsa.

Outro elemento finito é apresentado; este para analisar placas laminadas de material composto. Um resumo da teoria de placas laminadas precede a apresentação do elemento finito laminado (TK6) criado por Kosmatka, que leva em consideração o efeito das deformações devidas ao esforço cortante – teoria de Reissner-Mindlin. Em quatro exemplos são apresentados os resultados utilizando os elementos T18 e o TK6, comparando as performances de ambos com os valores teóricos.

O Capítulo 10 é dedicado à analise dinâmica. Inicialmente faz-se uma explanação da teoria utilizada neste capítulo, abordando a obtenção de frequências naturais para os diversos elementos estruturais mostrados nos capítulos anteriores e a análise dinâmica com cargas estacionárias e móveis. São obtidas as matrizes de massa para elementos de treliça, de vigas e de pórticos sem rótulas e de placas. Diversos exemplos são resolvidos e comentados.

Mais uma vez agradeço aos meus colegas da FEC-Unicamp doutores Francisco Antonio Menezes e Pérsio Leister de Almeida Barros pela ajuda que permitiu que eu pudesse terminar este livro; sem eles eu certamente não teria tido sucesso. Também agradeço ao professor Dr. Gustavo Henrique Siqueira, do Departamento de Estruturas da FEC-Unicamp, pelas proveitosas sugestões para os dois últimos capítulos deste livro.

Capítulo 1

Notas históricas

A intenção deste capítulo é mostrar que a “idéia” do método dos elementos finitos não está vinculada a uma pessoa ou a um grupo de pessoas da mesma época. Não se pretende também traçar uma revisão histórica, mas apenas ilustrar este livro com alguns nomes cuja contribuição foi marcante para seu desenvolvimento.

Há mais de dois mil anos, filósofos gregos já haviam elaborado teorias nas quais supunham que todas as coisas eram formadas por inúmeras partículas. Assim, Leucipo e Demócrito estabeleceram que tudo era constituído por um número infinitamente grande de partículas denominadas pelo último de *átomos*.

Eudóxio, criador do *método da exaustão*, que consiste em inscrever e circunscrever figuras retilíneas em figuras curvilíneas, já pensava, dessa forma, em discretizar a figura contínua para facilitar certos cálculos.

Esse método permitiu que fossem calculados áreas de figuras curvas e volumes de sólidos como esferas e cones. Ele é equivalente à passagem ao limite do cálculo integral e diferencial.

Mais recentemente, na década de 30, McHenry e Hrennikoff substituíram um elemento estrutural contínuo, como, por exemplo, uma placa, por uma estrutura formada por barras seguindo a geometria original, mantendo as mesmas condições de vinculação e cargas.

Esses métodos, que originaram a análise matricial, embora considerem o meio contínuo discretizado por elementos com propriedades de rigidez e elasticidade conhecidas, não apresentam o aspecto conceitual implícito no método dos elementos finitos.

Este consiste não apenas em transformar o sólido contínuo em uma associação de elementos discretos e escrever as equações de compatibilidade e equilíbrio entre eles, mas admitir funções contínuas que representam, por exemplo, o campo de deslocamentos no domínio de um elemento e, a partir daí, obter o estado de deformações correspondente que, associado às relações constitutivas do material, permitem definir o estado de tensões em todo o elemento.

Este estado de tensões é transformado em esforços internos que têm de estar em equilíbrio com as ações externas.

Essa formulação é derivada do método de Rayleigh-Ritz que se baseia na minimização da energia potencial total do sistema, escrita em função de um campo predefinido de deslocamentos (método dos deslocamentos).

Courant, matemático de renome, em 1943, aplicou esse procedimento no estudo da torção de Saint-Venant de seções vazadas.

Argyris e Kelsey publicaram uma série de trabalhos, na metade dos anos 50, nos quais a formulação matricial do método de Rayleigh-Ritz ficou definitivamente determinada e foi aplicada para analisar, principalmente, fuselagems e asas de aviões, simulando-as como constituídas por barras e painéis.

O método dos elementos finitos teve sua formulação estabelecida da forma como hoje é conhecida com a publicação do trabalho de Turner, Clough, Martin e Topp, em 1956.

Clough, autor do nome (método dos elementos finitos, em contraposição aos elementos infinitesimais do cálculo diferencial), descreve em detalhes sua participação no desenvolvimento desse método em artigo publicado em 1980.

Embora sua formulação já fosse conhecida desde o início dos anos 50, o método dos elementos finitos passou a ser difundido e aplicado nas diversas áreas – além da engenharia estrutural – com a rápida evolução e expansão dos computadores.

Atualmente, há centenas de programas computacionais comerciais de uso corrente em diversas áreas do conhecimento que utilizam esse método para análises linear e não-linear.

O método dos elementos finitos está hoje completamente agregado às atividades do engenheiro, de modo que seu aprendizado é essencial para que se possa lidar com lucidez com os programas comerciais disponíveis em quase todos os escritórios de projetos.

Todavia não se pode esquecer que os fundamentos nos quais o método dos elementos finitos se sustenta têm de ser apreendidos, e nomes como Bernoulli, Navier, Lagrange, Cauchy, Mohr, Maxwell, Clapeyron, Castigliano, Betti e tantos outros não podem deixar de ser lembrados.

Capítulo 2

Cálculo variacional – funcionais

2.1 Valores extremos de uma função

Sabe-se do cálculo diferencial que a condição necessária para que uma função $f(x)$, diferenciável no intervalo $x_1 < x < x_2$, tenha um valor extremo no ponto $(x_0, f(x_0))$ é que a primeira derivada da função no ponto x_0 seja nula:

$$f'(x_0) = \left(\frac{df(x)}{dx}\right)_{x=x_0} = 0$$

Geometricamente, isso significa que a reta tangente à curva $f(x)$ no ponto x_0 é horizontal.

Então, três possibilidades podem ocorrer, como mostra a Figura 2.1:

a) o ponto x_0 é um ponto de máximo relativo da função $f(x)$ (Figura 2.1a);

b) o ponto x_0 é um ponto de mínimo relativo da função $f(x)$ (Figura 2.1b);

c) o ponto x_0 é um ponto de inflexão da função $f(x)$ (Figura 2.1c).

Para identificar a qual dessas condições corresponde o valor extremo da função no ponto x_0, toma-se a derivada segunda da função nesse ponto. Se $f''(x_0) > 0$, a função tem um mínimo relativo, se $f''(x_0) < 0$, a função tem um máximo relativo.

Pode ocorrer que, num certo ponto $x = a$, tenha-se $f'(a) = f''(a) = 0$, o que impossibilita o estudo descrito acima. Essa dificuldade é contornada escrevendo a função como uma série de Taylor expandida na vizinhança do ponto $x = a$:

$$f(x) = f(a)+\left(\frac{df}{dx}\right)_{x=a}(x-a)+\frac{1}{2!}\left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)_{x=a}(x-a)^2+\frac{1}{3!}\left(\frac{d^3f}{dx^3}\right)_{x=a}(x-a)^3+\cdots \tag{2.1}$$

admitindo que $f(x)$ tenha derivadas contínuas na vizinhança do ponto $x = a$.

A igualdade (2.1) pode ser escrita em uma forma mais compacta como:

$$f(x) - f(a) = f'(a)\delta x + \frac{1}{2!}f''(a)(\delta x)^2 + \frac{1}{3!}f'''(a)(\delta x)^3 + \cdots \tag{2.2}$$

onde: $\delta x = x - a$.

Analisando a igualdade (2.2), pode-se chegar às condições necessária e suficiente para existência de máximos e mínimos. Para isso, supõe-se que $f(a)$ seja um valor extremo da função no intervalo $x_1 < a < x_2$. Assim, $f(x) - f(a)$ será um número positivo se na vizinhança de $x = a$ o valor da função for um mínimo; será um máximo se $f(x) - f(a)$ for negativo. Como δx pode ser positivo ou negativo para os valores admissíveis de x, então deve-se ter $f'(a) = 0$ por ser o primeiro termo do lado direito dessa igualdade de valor predominante. A condição necessária para que se tenha um valor extremo no ponto $x = a$ é que $f'(a) = 0$.

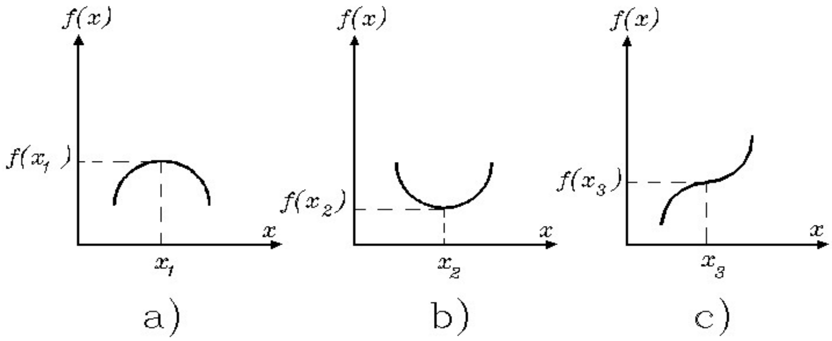

Figura 2.1: a) Ponto de máximo relativo. b) Ponto de mínimo relativo. c) Ponto de inflexão.

Como o primeiro termo do lado direito da igualdade é nulo, o termo predominante da série é o que contém a derivada segunda. Como $(\delta x)^2$ é sempre positivo, tem-se que $f(a)$ é um valor mínimo se $f''(a) > 0$ e um valor máximo se $f''(a) < 0$, o que corresponde à condição de suficiência.

Admitindo-se que as derivadas até a ordem $n-1$ se anulem no ponto $x = a$, ou seja:

$$f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{n-1}(a) = 0$$

mas, sendo $f^n(a) \neq 0$, pode-se concluir que: se n for par, então:

$$\begin{gathered} f(a) \text{ é um valor máximo se } f^n(a) < 0 \\ f(a) \text{ é um valor mínimo se } f^n(a) > 0. \end{gathered}$$

Se n for ímpar, tem-se um ponto de inflexão.

De modo análogo, a condição necessária para que uma função bidimensional $f(x, y)$, diferenciável, tenha um valor extremo no ponto de coordenadas $x = x_0$ e $y = y_0$, é que seu diferencial se anule, ou seja:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0 \quad \text{em} \quad (x_0, y_0) \tag{2.3}$$

ou de modo equivalente: $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ em (x_0, y_0).

2.2 Cálculo variacional

O surgimento do cálculo variacional deve-se a Jean Bernoulli (1667-1778) que, em 1696, propôs a Euler o problema: *dados dois pontos A e B em um plano vertical, qual o caminho que um corpo deve seguir, descendo de A para B, sem atrito, no mínimo tempo?*

Leonhardt Euler (1707-1783) resolveu-o encontrando a curva denominada *braquistócrona* (do grego: *brachistos*=menor e *chronos*=tempo) ou ciclóide.

No cálculo variacional, ou cálculo de variações, não se trabalha com funções, mas com funcionais. Um funcional é uma entidade que depende de uma função, ou seja, é função de uma função.

Por exemplo, as coordenadas do baricentro da figura limitada pelas funções $f_1(x)$ e $f_2(x)$, mostrada na Figura 2.2a, contêm funcionais do tipo:

$$x_c = \frac{\int_a^b x[f_2(x) - f_1(x)]dx}{\int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx}$$

$$y_c = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b [f_2(x) + f_1(x)][f_2(x) - f_1(x)]dx}{\int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx}$$

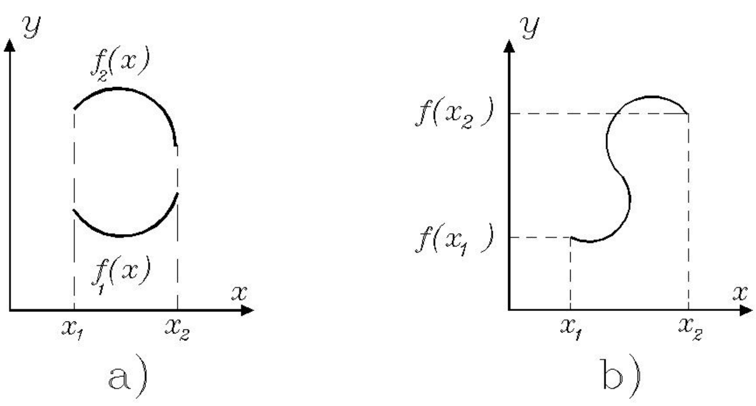

Figura 2.2: Exemplos de funcionais.

Também é um funcional a expressão matemática que representa o comprimento de uma curva – como a mostrada na Figura 2.2b – dada por:

$$l = \int_{x1}^{x2} \sqrt{1 + (y')^2}dx$$

O cálculo variacional estuda os métodos que permitem achar os valores extremos dos funcionais. As leis da mecânica que aplicam esses métodos são chamadas de princípios variacionais. A eles pertencem, por exemplo, o princípio da mínima energia potencial, o princípio da mínima ação e a lei da conservação da energia.

2.3 Operador variacional

Seja F uma função dependente da função y e de sua derivada $y' = \frac{dy}{dx}$, representada pela notação:

$$F = F(x, y, y')$$

No intervalo $x_1 < x < x_2$, a função $y = y(x)$ assume os valores $y_1 = y(x_1)$ e $y_2 = y(x_2)$, como mostra a Figura 2.3.

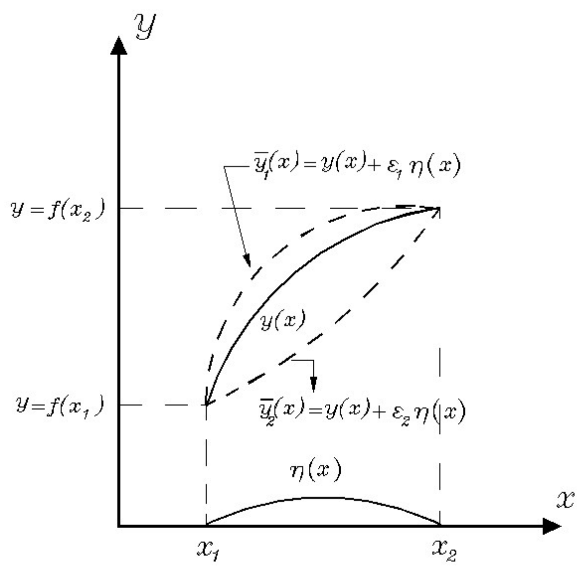

Figura 2.3: Funções $y(x)$ e $\overline{y}(x)$.

A função $y(x)$ pode ser imaginada como sendo, por exemplo, a representação analítica exata das deflexões de uma viga em equilíbrio sob um certo estado de carregamento.

Diz-se que uma função é *admissível* quando, dentro de uma certa tolerância e satisfazendo as condições de contorno, representam a função exata $y(x)$. A função *admissível* tem a forma:

$$\bar{y}(x) = y(x) + \lambda \eta(x) \tag{2.4}$$