

# **ANÁLISE COMPUTACIONAL DE ESTRUTURAS**



UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Reitor  
JOSÉ TADEU JORGE

Coordenador Geral da Universidade  
ALVARO PENTEADO CRÓSTA

EDITORIA  
UNICAMP

Conselho Editorial

Presidente  
EDUARDO GUIMARÃES

ESDRAS RODRIGUES SILVA – GUITA GRIN DEBERT  
JOÃO LUIZ DE CARVALHO PINTO E SILVA – LUIZ CARLOS DIAS  
LUIZ FRANCISCO DIAS – MARCO AURÉLIO CREMASCO  
RICARDO ANTUNES – SEDI HIRANO

Marco Lúcio Bittencourt

**ANÁLISE COMPUTACIONAL  
DE ESTRUTURAS**

*Com aplicação do Método de  
Elementos Finitos*

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELO  
SISTEMA DE BIBLIOTECAS DA UNICAMP  
DIRETORIA DE TRATAMENTO DA INFORMAÇÃO

---

B548a Bittencourt, Marco Lúcio.  
Análise computacional de estruturas : com aplicação do Método de Elementos Finitos / Marco Lúcio Bittencourt. – Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2010.

1. Método de Elementos Finitos. 2. Análise estrutural. 3. Teoria das estruturas.  
4. ANSYS (programa de computador). I. Título.

CDD 620.00151  
624.171  
005.43

ISBN 978-85-268-0911-6

---

Índices para catálogo sistemático:

1. Método de Elementos Finitos	620.00151
2. Análise estrutural	624.171
3. Teoria das estruturas	624.171
4. ANSYS (programa de computador)	005.43

Copyright © by Marco Lúcio Bittencourt  
Copyright © 2010 by Editora da Unicamp

1ª reimpressão, 2014

Direitos reservados e protegidos pela Lei 9.610 de 19.2.1998.  
É proibida a reprodução total ou parcial sem autorização,  
por escrito, dos detentores dos direitos.

Printed in Brazil.  
Foi feito o depósito legal.

Direitos reservados à

Editora da Unicamp  
Rua Caio Graco Prado, 50 – Campus Unicamp  
CEP 13083-892 – Campinas – SP – Brasil  
Tel./Fax: (19) 3521-7718/7728  
www.editora.unicamp.br – vendas@editora.unicamp.br

# Sumário

<b>Lista de Figuras</b>	<b>9</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>14</b>
<b>Nomenclatura</b>	<b>17</b>
<b>Prefácio</b>	<b>23</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>25</b>
1.1 Conceitos básicos . . . . .	25
<b>2 Barra em tração e viga em flexão pura</b>	<b>29</b>
2.1 Barra em tração simples . . . . .	29
2.2 Viga em flexão pura . . . . .	31
2.3 Coeficientes de influência . . . . .	32
2.4 Elemento de mola . . . . .	34
2.5 Elemento de barra plana . . . . .	36
2.5.1 Deformação longitudinal específica e tensão normal . . . . .	37
2.5.2 Elemento de barra no sistema global de referência . . . . .	37
2.6 Determinação da equação global . . . . .	40
2.6.1 Cálculo das deformações e tensões nos elementos de barra . . . . .	46
2.7 Elemento de viga em flexão pura . . . . .	47
2.8 Elemento de viga em tração e flexão . . . . .	54
2.9 Exercícios propostos . . . . .	57
<b>3 Introdução ao programa ANSYS</b>	<b>59</b>
3.1 Organização do ANSYS . . . . .	60
3.2 Treliça . . . . .	62
3.3 Viga . . . . .	90
3.4 Exercícios propostos . . . . .	102
<b>4 Equações básicas de elasticidade</b>	<b>105</b>
4.1 Estado geral de deformação . . . . .	105
4.2 Deformações térmicas . . . . .	110

4.3	Conceito de tensão . . . . .	111
4.4	Estado de tensão em um ponto . . . . .	114
4.5	Equações diferenciais de equilíbrio . . . . .	119
4.6	Lei de Hooke . . . . .	122
4.7	Exercícios propostos . . . . .	126
<b>5</b>	<b>Equação de movimento</b>	<b>127</b>
5.1	Trabalho e energia de deformação . . . . .	127
5.2	Identidade de Green . . . . .	132
5.3	Princípio dos Trabalhos Virtuais . . . . .	134
5.4	Discretização de um sistema contínuo . . . . .	141
5.5	Equação de movimento . . . . .	142
5.6	Elemento de barra plana . . . . .	145
5.7	Elemento de viga plana . . . . .	148
5.8	Forma fraca do problema de barra em tração . . . . .	150
5.9	Exercícios propostos . . . . .	152
<b>6</b>	<b>Funções de interpolação</b>	<b>153</b>
6.1	Sistemas de referência global e local . . . . .	153
6.2	Funções de forma . . . . .	156
6.3	Elementos unidimensionais . . . . .	157
6.3.1	Elemento linear . . . . .	157
6.3.2	Elemento quadrático . . . . .	158
6.3.3	Elemento cúbico . . . . .	159
6.3.4	Elemento quártico . . . . .	160
6.4	Elemento bidimensional linear . . . . .	161
6.5	Elementos isoparamétricos . . . . .	163
6.6	Jacobiano e cálculo das derivadas globais . . . . .	166
6.7	Dedução da matriz de rigidez de barra plana . . . . .	169
6.8	Exercícios propostos . . . . .	171
<b>7</b>	<b>Funções de forma para quadrados e hexaedros</b>	<b>173</b>
7.1	Triângulo de Pascal . . . . .	173
7.2	Quadrados . . . . .	176
7.2.1	Elemento quadrático . . . . .	176
7.2.2	Elemento cúbico . . . . .	181
7.2.3	Elemento quártico . . . . .	183
7.3	Hexaedros . . . . .	185
7.3.1	Elemento linear . . . . .	185
7.3.2	Elemento quadrático . . . . .	187
7.3.3	Elemento cúbico . . . . .	188

<b>8</b>	<b>Funções de forma para triângulos e tetraedros</b>	<b>193</b>
8.1	Coordenadas de área . . . . .	193
8.2	Triângulos . . . . .	194
8.2.1	Elemento linear . . . . .	195
8.2.2	Elemento quadrático . . . . .	196
8.2.3	Elemento cúbico . . . . .	200
8.2.4	Elemento quártico . . . . .	200
8.2.5	Cálculo do jacobiano e das derivadas globais . . . . .	204
8.3	Coordenadas de volume . . . . .	206
8.4	Tetraedros . . . . .	207
8.4.1	Tetraedro linear . . . . .	208
8.4.2	Tetraedro quadrático . . . . .	209
8.4.3	Tetraedro cúbico . . . . .	211
8.4.4	Cálculo do jacobiano e das derivadas globais . . . . .	212
8.5	Exercícios propostos . . . . .	214
<b>9</b>	<b>Integração numérica</b>	<b>215</b>
9.1	Quadratura de Newton-Cotes . . . . .	215
9.2	Quadratura de Gauss-Legendre . . . . .	217
9.3	Integração numérica bidimensional . . . . .	220
9.4	Integração numérica tridimensional . . . . .	225
9.5	Exercícios propostos . . . . .	225
<b>10</b>	<b>Estudo de casos</b>	<b>227</b>
10.1	Estado plano de tensão . . . . .	227
10.2	Estado plano de deformação . . . . .	233
10.3	Estruturas axissimétricas . . . . .	234
10.4	Considerações sobre elementos finitos isoparamétricos . . . . .	240
10.4.1	Integração numérica . . . . .	240
10.4.2	Cálculo de tensões . . . . .	242
10.4.3	Considerações sobre modelamento . . . . .	242
10.5	Exercícios propostos . . . . .	243
	<b>Referências bibliográficas</b>	<b>245</b>
<b>A</b>	<b>Vetores e matrizes</b>	<b>247</b>
A.1	Vetores . . . . .	247
A.2	Matrizes . . . . .	248
A.2.1	Matriz nula . . . . .	249
A.2.2	Matriz quadrada . . . . .	249
A.2.3	Matriz diagonal . . . . .	249
A.2.4	Matriz unitária ou identidade . . . . .	249

A.2.5	Matrizes diagonais superior e inferior . . . . .	250
A.2.6	Matriz banda . . . . .	250
A.2.7	Matrizes simétrica e antissimétrica . . . . .	251
A.2.8	Particionamento de uma matriz . . . . .	251
A.2.9	Matriz transposta . . . . .	252
A.3	Operações matriciais . . . . .	252
A.3.1	Igualdade . . . . .	252
A.3.2	Adição e subtração . . . . .	252
A.3.3	Multiplicação . . . . .	252
A.4	Sistema de equações lineares . . . . .	253
A.5	Problema de autovalor . . . . .	253
<b>B</b>	<b>Método de Cholesky</b> . . . . .	<b>255</b>
B.1	Decomposição de Cholesky . . . . .	255
B.2	Aplicação do método de Cholesky . . . . .	257
<b>C</b>	<b>Comandos do programa ANSYS</b> . . . . .	<b>259</b>
C.1	Comandos do ANSYS . . . . .	259
C.1.1	Nós . . . . .	259
C.1.2	Elementos . . . . .	260
C.1.3	Tipo de elemento . . . . .	260
C.1.4	Constantes reais . . . . .	260
C.1.5	Carregamentos e condições de contorno . . . . .	261
C.1.6	Casos de carregamentos . . . . .	261
C.1.7	Material . . . . .	261
C.1.8	Sistemas de coordenadas . . . . .	262
C.1.9	Reordenamento dos elementos . . . . .	262
C.1.10	Tipo de análise . . . . .	262
C.1.11	Pontos . . . . .	262
C.1.12	Linhas . . . . .	263
C.1.13	Áreas . . . . .	264
C.1.14	Volumes . . . . .	264
C.1.15	Geração de malha . . . . .	265
C.1.16	Aplicação de condições de contorno ao modelo sólido . . . . .	265
C.1.17	Seleção de entidades . . . . .	266
C.1.18	Comandos / . . . . .	266
C.1.19	Graus de liberdade <i>masters</i> . . . . .	266
C.1.20	Comandos de visualização . . . . .	266
C.1.21	Pós-processador . . . . .	267
C.1.22	Outros comandos . . . . .	267



<b>D Exemplos analisados com o ANSYS</b>	<b>269</b>
D.1 Estrutura reticulada . . . . .	269
D.2 Deformação em vigas . . . . .	271
D.3 Pórtico . . . . .	272
D.4 Estudo de um eixo . . . . .	275
D.5 Viga: problema de estado plano de tensão . . . . .	278
D.6 Problema com simetria . . . . .	280
D.7 Múltiplos carregamentos . . . . .	283
D.8 Geração automática de malhas em áreas . . . . .	284
D.9 Geração automática de malha em volumes . . . . .	286
D.10 Simetria em volumes . . . . .	289
D.11 Estrutura modelada por elementos de placa . . . . .	292

## Lista de Figuras

1.1 Corpo considerado como meio contínuo e sua discretização em elementos finitos. . . . .	26
1.2 Superposição das matrizes dos elementos na matriz global. . . . .	27
2.1 Barra submetida a uma força de tração $P$ . . . . .	30
2.2 Deformação em vigas. . . . .	31
2.3 Estrutura elástica sob ação de forças $F_1, \dots, F_n$ . . . . .	33
2.4 Mola de constante elástica $k$ . . . . .	34
2.5 Estados de deslocamentos para a mola. . . . .	35
2.6 Elemento de barra plana segundo o sistema de referência local $\bar{X}$ . . . . .	36
2.7 Elemento da barra no sistema global $XY$ . . . . .	38
2.8 Treliça analisada estaticamente. . . . .	40
2.9 Numeração dos nós, graus de liberdade e elementos. . . . .	41
2.10 Elemento de viga plana segundo o sistema de referência local $\bar{X}\bar{Y}$ . . . . .	48
2.11 Estados cinemáticos para a viga. . . . .	48
2.12 Exemplo de viga plana. . . . .	50
2.13 Elemento de viga com flexão e tração. . . . .	54
2.14 Transformação global-local para o elemento de viga com tração e flexão. . . . .	55
2.15 Viga com esforços de flexão e tração. . . . .	56
2.16 Exercícios 2.1 e 2.2. . . . .	58
3.1 Interface gráfica do ANSYS. . . . .	60
3.2 Módulos do programa ANSYS. . . . .	61
3.3 Definição do título da análise. . . . .	62
3.4 Definição do tipo de elemento. . . . .	63
3.5 Menu de tipos de elementos. . . . .	64

3.6	Finalizando a seleção do tipo de elemento. . . . .	64
3.7	Definição das constantes reais para os elementos. . . . .	65
3.8	Definição da área da seção transversal das barras 1 a 4. . . . .	66
3.9	Definição das constantes do conjunto 1. . . . .	66
3.10	Definição da área da seção transversal das barras 5 e 6. . . . .	67
3.11	Finalizando as definições das constantes reais. . . . .	67
3.12	Definição do modelo de material. . . . .	68
3.13	Definição do módulo de elasticidade do material. . . . .	68
3.14	Definição dos nós usando a opção <i>Working Plane</i> . . . . .	69
3.15	Definição das coordenadas nodais do nó 1. . . . .	70
3.16	Definição das coordenadas nodais do nó 4. . . . .	70
3.17	Definição dos atributos dos elementos 1 a 4. . . . .	71
3.18	Criação dos elementos 1 a 4. . . . .	72
3.19	Criação do elemento 1. . . . .	72
3.20	Criação do elemento 4. . . . .	73
3.21	Finalizando a definição dos elementos 1 a 4. . . . .	73
3.22	Seleção do segundo conjunto de constantes reais. . . . .	74
3.23	Criação do elemento 5. . . . .	74
3.24	Malha final da treliça. . . . .	75
3.25	Janela para indicar os números dos nós com apoios. . . . .	75
3.26	Definição dos apoios em UX e UY dos nós 1 e 4. . . . .	76
3.27	Treliça com os apoios. . . . .	76
3.28	Aplicação da força sobre o nó 4. . . . .	77
3.29	Mostrando a força aplicada ao nó 4. . . . .	78
3.30	Tabela com as forças nodais na treliça. . . . .	78
3.31	Início da solução. . . . .	79
3.32	Conclusão do processo de solução. . . . .	79
3.33	Definição da tabela de resultados dos elementos. . . . .	80
3.34	Leitura dos valores das forças axiais. . . . .	81
3.35	Leitura dos valores da tensão normal. . . . .	81
3.36	Tabela final de resultados. . . . .	82
3.37	Geometria deformada da treliça. . . . .	83
3.38	Listagem da tabela de resultados. . . . .	83
3.39	Tabela com os resultados de força e tensão normais nos elementos. . . . .	84
3.40	Gráfico de força normal nas barras. . . . .	84
3.41	Representação gráfica para os resultados de forças normais nas barras. . . . .	85
3.42	Seleção da coluna de resultados da tensão normal. . . . .	85
3.43	Representação gráfica para a tensão normal nas barras. . . . .	86
3.44	Forças de reação para os nós 1 e 2. . . . .	86
3.45	Tabela com os valores das reações de apoio. . . . .	87
3.46	Solução nodal. . . . .	87
3.47	Finalizando o programa. . . . .	88

3.48	Tipo de elemento BEAM3 para a viga. . . . .	90
3.49	Definição das propriedades geométricas dos elementos de viga. . . . .	91
3.50	Criação do primeiro nó da viga. . . . .	92
3.51	Criação do quarto nó da viga. . . . .	92
3.52	Uso do comando FILL. . . . .	93
3.53	Criação dos nós com o comando FILL. . . . .	93
3.54	Malha final da viga. . . . .	94
3.55	Tabela de resultados nos elementos da malha da viga. . . . .	94
3.56	Geometria deformada da viga. . . . .	95
3.57	Listagem das forças normal e cortante e do momento fletor para os nós dos elementos de viga. . . . .	95
3.58	Listagem das tensões normais para os nós dos elementos de viga. . . . .	96
3.59	Listagem das tensões normais resultantes para os nós dos elementos de viga. . . . .	96
3.60	Selecionando a força cortante em cada nó dos elementos de viga. . . . .	97
3.61	Diagrama da força cortante. . . . .	98
3.62	Seleção do momento fletor em cada nó dos elementos de viga. . . . .	98
3.63	Diagrama do momento fletor. . . . .	99
3.64	Resultados gráficos para a coluna SDPI. . . . .	99
3.65	Resultados gráficos para a coluna SDPJ. . . . .	100
3.66	Resultados gráficos para a coluna SBI. . . . .	100
3.67	Resultados gráficos para a coluna SBJ. . . . .	101
3.68	Força nodal equivalente. . . . .	101
3.69	Treliça do exercício 3.1. . . . .	103
3.70	Viga do exercício 3.2. . . . .	103
4.1	Corpo submetido à ação de um sistema de forças externas. . . . .	106
4.2	Elemento infinitesimal de um corpo em torno do ponto $P$ . . . . .	106
4.3	Plano $xy$ do elemento infinitesimal utilizado para a determinação das deformações específicas $\epsilon_{xx}$ , $\epsilon_{yy}$ e distorção $\gamma_{xy}$ . . . . .	107
4.4	Elemento infinitesimal submetido a um gradiente de temperatura $\Delta T$ . . . . .	111
4.5	Distribuição de esforços internos na seção transversal do corpo. . . . .	112
4.6	Componentes de um estado geral de tensão em um ponto $O$ do corpo tridimensional. . . . .	113
4.7	Corpo sólido submetido a um sistema de forças externas. . . . .	115
4.8	Partes inferiores do corpo sólido obtidas pelos cortes através dos planos $mm$ e $nn$ . . . . .	116
4.9	Componentes de tensão no ponto $O$ do corpo tridimensional. . . . .	117
4.10	Tetraedro elementar no ponto $O$ e suas componentes médias de tensão. . . . .	117
4.11	Paralelepípedo elementar com suas componentes médias de tensão. . . . .	120
5.1	Diagrama força $\times$ deslocamento para a deformação de um corpo. . . . .	128

5.2	Diagrama de tensão $\times$ deformação. . . . .	129
5.3	Momento fletor na seção transversal da viga. . . . .	130
5.4	Projeção da área elementar $dS$ sobre o plano $yz$ . . . . .	133
5.5	Esforços externos em uma barra. . . . .	137
5.6	Esforços externos em uma viga. . . . .	138
5.7	Meio contínuo discretizado por elementos finitos. . . . .	141
5.8	Polinômios de Hermite e suas derivadas. . . . .	149
5.9	Vigas do exercício 5.2. . . . .	152
6.1	Mapeamento entre os sistemas de referência global $X$ e local $\xi$ . . . . .	153
6.2	Transformação entre os sistemas de referência global e local. . . . .	154
6.3	Transformação entre os sistemas de referência global e local utilizando funções de forma. . . . .	155
6.4	Pontos no sistema de referência local $\xi$ . . . . .	156
6.5	Elemento unidimensional linear. . . . .	157
6.6	Elemento unidimensional quadrático. . . . .	158
6.7	Elemento unidimensional cúbico. . . . .	160
6.8	Elemento unidimensional quártico. . . . .	161
6.9	Elemento quadrangular linear. . . . .	162
6.10	Elementos lagrangianos quadrangulares. . . . .	163
6.11	Elementos finitos subparamétrico, isoparamétrico e superparamétrico. . . . .	163
6.12	Exemplo de transformação entre os sistemas de referência local e global utilizando-se as funções de forma. . . . .	165
6.13	Exemplo de transformação de um arco de círculo. . . . .	166
6.14	Condição para que os elementos quadrangulares linear e quadrático não apresentem distorção. . . . .	168
6.15	Exercícios 6.2, 6.4 e 6.5. . . . .	171
7.1	Triângulo de Pascal. . . . .	175
7.2	Elementos planos da família serendipity. . . . .	177
7.3	Função de forma para os nós do quadrado linear. . . . .	177
7.4	Elemento quadrático da família serendipity. . . . .	178
7.5	Funções de forma para os nós do elemento quadrático. . . . .	179
7.6	Elemento quadrangular cúbico. . . . .	181
7.7	Funções de forma do elemento cúbico. . . . .	183
7.8	Funções de forma para os elementos quadrático e cúbico da família la- grangiana. . . . .	184
7.9	Elemento quadrangular quártico. . . . .	185
7.10	Funções de forma para os nós do elemento quártico. . . . .	186
7.11	Elementos espaciais linear, quadrático e cúbico. . . . .	186
7.12	Elemento espacial linear. . . . .	187
7.13	Elemento espacial quadrático. . . . .	189

7.14	Elemento espacial de terceiro grau. . . . .	190
8.1	Coordenadas de área para triângulos. . . . .	194
8.2	Elementos triangulares. . . . .	195
8.3	Elemento triangular linear. . . . .	196
8.4	Funções de interpolação para o triângulo linear. . . . .	197
8.5	Elemento triangular quadrático. . . . .	197
8.6	Funções de interpolação para o triângulo quadrático. . . . .	199
8.7	Elemento triangular cúbico. . . . .	201
8.8	Funções de interpolação para o triângulo cúbico. . . . .	201
8.9	Elemento triangular quártico. . . . .	203
8.10	Funções de interpolação para o triângulo quártico. . . . .	203
8.11	Coordenadas de volume: componente $L_1$ . . . . .	207
8.12	Tetraedros linear, quadrático e cúbico. . . . .	208
8.13	Tetraedro linear. . . . .	208
8.14	Tetraedro quadrático. . . . .	210
8.15	Tetraedro cúbico. . . . .	212
8.16	Exercício 8.1. . . . .	213
9.1	Pontos igualmente espaçados para a técnica de integração de Newton-Cotes. . . . .	216
9.2	Pontos de integração de Gauss-Legendre para os elementos unidimensionais. . . . .	217
9.3	Pontos de integração para os elementos quadrangulares planos. . . . .	223
9.4	Pontos de integração para os elementos triangulares planos. . . . .	223
10.1	Chapa sob estado plano de tensão. . . . .	227
10.2	Muro de arrimo sob pressão lateral e um rolamento sob compressão diametral. . . . .	234
10.3	Sólido axissimétrico. . . . .	235
10.4	Componentes de deformação em coordenadas cilíndricas. . . . .	236
10.5	Elemento infinitesimal no plano $r\theta$ . . . . .	236
10.6	Plano $rz$ para um elemento infinitesimal. . . . .	237
10.7	Elemento de volume infinitesimal para um sólido de revolução. . . . .	239
10.8	Problema de estado plano de tensão calculado com esquemas de integração consistente e reduzida. . . . .	242
A.1	Sistema cartesiano de referência. . . . .	248
D.1	Treliça analisada. . . . .	270
D.2	Viga em estudo. . . . .	271
D.3	Pórtico analisado. . . . .	273
D.4	Eixo analisado. . . . .	276

D.5	Sistema de vigas equivalente ao eixo. . . . .	277
D.6	Viga analisada com malha de quadrados e estado plano de tensão. . . .	279
D.7	Chapa com furo submetida a um pressão interna uniforme. . . . .	281
D.8	Geração automática de malha em problema plano. . . . .	284
D.9	Viga analisada como problema espacial utilizando cubos de oito nós. . .	287
D.10	Disco gerado utilizando a simetria do problema. . . . .	290
D.11	Estrutura modelada por elementos de placa. . . . .	292

## Lista de Tabelas

2.1	Coordenadas nodais da treliça. . . . .	41
2.2	Incidência, comprimento, área e cossenos diretores dos elementos de barra.	41
2.3	Graus de liberdade correspondentes às linhas e colunas nas quais devem ser superpostas as matrizes dos elementos. . . . .	42
2.4	Deformação específica e tensão normal nos elementos da treliça analisada.	46
2.5	Áreas das barras a cada iteração do dimensionamento. . . . .	47
2.6	Tensões nas barras a cada iteração do dimensionamento. . . . .	47
2.7	Números dos nós e graus de liberdade do exemplo da viga. . . . .	51
2.8	Solução analítica calculada nos nós do exemplo da viga. . . . .	53
6.1	Relação entre os índices $a$ , $b$ e $c$ para o elemento quadrangular linear. .	162
7.1	Relação entre os índices $a$ , $b$ e $c$ para o elemento quadrático. . . . .	176
7.2	Relação entre os índices $a$ , $b$ e $c$ para o elemento cúbico. . . . .	182
7.3	Relação entre os índices $a$ , $b$ e $c$ para o elemento quártico. . . . .	185
7.4	Relação entre os índices $a$ , $b$ , $c$ e $d$ para o elemento espacial linear. . . .	188
7.5	Relação entre os índices $a$ , $b$ , $c$ e $d$ para o elemento espacial quadrático.	189
7.6	Relação entre os índices $a$ , $b$ , $c$ e $d$ para o elemento espacial de terceiro grau. . . . .	191
8.1	Relação entre os índices $a$ , $b$ , $c$ e $d$ para o elemento linear. . . . .	196
8.2	Relação entre os índices $a$ , $b$ , $c$ e $d$ para o elemento quadrático. . . . .	198
8.3	Relação entre os índices $a$ , $b$ , $c$ e $d$ para o elemento cúbico. . . . .	201
8.4	Relação entre os índices $a$ , $b$ , $c$ e $d$ para o elemento quártico. . . . .	202
8.5	Relação entre os índices $a$ , $b$ , $c$ , $d$ e $e$ para o tetraedro linear. . . . .	209
8.6	Relação entre os índices $a$ , $b$ , $c$ , $d$ e $e$ para o tetraedro quadrático. . . .	209
8.7	Relação entre os índices $a$ , $b$ , $c$ , $d$ e $e$ para o tetraedro cúbico. . . . .	211
9.1	Coefficientes de ponderação para as fórmulas de quadratura de Newton-Cotes. . . . .	216
9.2	Pontos de integração e coeficientes de ponderação para a quadratura de Gauss-Legendre para o intervalo $(-1, 1)$ . . . . .	217

9.3	Ordem de integração para os elementos unidimensionais. . . . .	220
9.4	Pontos de integração e coeficientes de ponderação para elementos quadrangulares planos. . . . .	222
9.5	Ordem de integração para os elementos quadrangulares planos. . . . .	223
9.6	Pontos de integração e coeficientes de ponderação para elementos triangulares planos. . . . .	224
9.7	Pontos de integração e ponderações para os tetraedros. . . . .	225
10.1	Ordem de integração consistente e reduzida para o cálculo da matriz de rigidez dos elementos quadrangulares planos. . . . .	241





# Nomenclatura

## Símbolos latinos

$a, b, c, d, e$	índices de tensorização
$c_{ij}$	coeficientes da matriz de flexibilidade
$\det[J]$	determinante da matriz do jacobiano
$dA$	diferencial de área
$dV$	diferencial de volume
$e_V$	dilatação
$\mathbf{e}_X, \mathbf{e}_Y, \mathbf{e}_Z$	versores do sistema global de referência
$\mathbf{e}_{\bar{X}}, \mathbf{e}_{\bar{Y}}, \mathbf{e}_{\bar{Z}}$	versores do sistema local de referência
$k$	constante elástica da mola
$k_c$	fator de cisalhamento
$k_{ij}$	coeficientes da matriz de rigidez
$l_P, m_P, n_P$	cosenos diretores da normal a um plano $P$
$l_a^{(n)}$	polinômio de Lagrange unidimensional de ordem $n$ associado ao nó $a$
$n$	número de nós
$r$	coordenada radial
$u, v, w$	componentes de deslocamento segundo o sistema de referência global
$\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$	componentes de deslocamento segundo o sistema de referência local
$A$	área da seção transversal ou área do elemento
$L_1, L_2, L_3, L_4$	coordenadas baricêntricas
$(L_1^l, L_2^l, L_3^l, L_4^l)$	coordenadas dos pontos de integração para triângulos e tetraedros
$E$	módulo de elasticidade longitudinal do material
$F_i$	forças concentradas aplicadas aos pontos $i = 1, \dots, n$
$\bar{F}_i$	força transversal externa aplicada ao nó $i$ na direção local $\bar{Y}$
$G$	módulo de elasticidade transversal do material
$H_l$	ponderações dos pontos de integração
$I_z$	momento de inércia da seção transversal da viga com relação ao eixo $Z$ do sistema de referência

## Símbolos latinos

$P$	força externa
$\bar{P}_i$	força axial externa aplicada ao nó $i$ na direção local $\bar{X}$
$L$	comprimento do elemento
$\bar{M}_i$	momento fletor externo aplicado ao nó $i$ na direção local $\bar{Z}$
$M_z$	momento fletor nas seções de uma viga com relação ao eixo $Z$ do sistema de referência
$N_a$	função de interpolação associada ao nó $a$ do elemento
$N_{a,x}, N_{a,y}, N_{a,z}$	derivadas da função de interpolação associada ao nó $a$ em relação a $X, Y, Z$
$N_{a,\xi}, N_{a,\eta}, N_{a,\zeta}$	derivadas da função de interpolação associada ao nó $a$ em relação a $\xi, \eta, \zeta$
$N_{int}$	número de pontos de integração
$N_x$	força normal nas seções de uma barra ou viga na direção do eixo $X$ do sistema de referência
$\vec{P}_i$	vetor de força concentrada no ponto $i$
$T_x, T_y, T_z$	componentes do vetor tensão
$\tilde{T}_t$	vetor tensão média
$\vec{T}_t$	vetor tensão
$U_i$	energia de deformação
$\bar{U}_i$	densidade de energia de deformação
$V_y$	força cortante nas seções de uma viga na direção do eixo $Y$ do sistema de referência
$W$	trabalho
$X, Y, Z$	eixos do sistema de referência global
$\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$	eixos do sistema de referência local
$X_a, Y_a, Z_a$	coordenadas nodais no sistema de referência global $XYZ$
$R_a, \Theta_a, Z_a$	coordenadas nodais no sistema de referência global polar $R\Theta Z$

## Símbolos gregos

$\alpha$	coeficiente de expansão térmica
$\alpha_t$	função teste para a forma fraca
$\xi, \eta, \zeta$	coordenadas locais normalizadas do elemento
$\xi_l, \eta_l, \zeta_l$	coordenadas dos pontos de integração para quadrados e hexaedros
$\delta_i$	deslocamentos nos pontos $i = 1, \dots, n$
$\delta_{ab}$	delta de Kronecker
$\delta A$	área da superfície elementar
$\delta u, \delta v, \delta w$	componentes de deslocamento virtual ao longo dos eixos $x, y$ e $z$ do sistema de referência global
$\delta \vec{P}$	vetor da resultante das forças internas na vizinhança de um ponto
$\delta \bar{U}_i$	densidade de energia de deformação virtual
$\delta W$	trabalho virtual das forças concentradas
$\delta W_{\Phi_i}$	trabalho virtual das forças externas de superfície
$\delta W_{\chi_i}$	trabalho virtual das forças externas de corpo
$\epsilon$	deformação normal
$\epsilon_T$	deformação normal térmica
$\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{zz}$	componentes de deformação normal em um ponto nas direções $X, Y$ e $Z$
$\epsilon_{T_{xx}}, \epsilon_{T_{yy}}, \epsilon_{T_{zz}}$	componentes de deformação normal térmica em um ponto nas direções $X, Y$ e $Z$
$\epsilon_{rr}, \epsilon_{\theta\theta}, \epsilon_{zz}$	componentes de deformação normal em um ponto nas direções polares $R, \Theta$ e $Z$
$\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$	componentes de deformação cisalhante total em um ponto segundo os planos $XY, XZ$ e $YZ$
$\gamma_{rz}$	componente de deformação cisalhante total em um ponto segundo o plano polar $RZ$
$\lambda$	coeficiente de Lamé
$\mu$	coeficiente de Lamé
$\nu$	coeficiente de Poisson
$\sigma$	tensão normal
$\bar{\sigma}$	tensão normal admissível do material
$\sigma_n$	tensão normal segundo o plano $\vec{N}$
$\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}$	componentes de tensão normal em um ponto nas direções $X, Y, Z$
$\tau_n$	tensão de cisalhamento segundo o plano $\vec{N}$
$\theta_z$	rotação nas seções de uma viga em relação ao eixo $z$ do sistema de referência
$\delta\theta_z$	rotação virtual nas seções de uma viga em relação ao eixo $z$ do sistema de referência
$\theta$	ângulo de rotação dos elementos de barra e viga em relação ao eixo $Z$ do sistema de referência global

## Símbolos gregos

$\tau_{xy}$	componente de tensão de cisalhamento em um ponto segundo o plano $XY$
$\tau_{yx}$	componente de tensão de cisalhamento em um ponto segundo o plano $YX$
$\tau_{xz}$	componente de tensão de cisalhamento em um ponto segundo o plano $XZ$
$\tau_{zx}$	componente de tensão de cisalhamento em um ponto segundo o plano $ZX$
$\tau_{yz}$	componente de tensão de cisalhamento em um ponto segundo o plano $YZ$
$\tau_{zy}$	componente de tensão de cisalhamento em um ponto segundo o plano $ZY$
$\chi_x, \chi_y, \chi_z$	componentes das forças de volume nas direções $X, Y, Z$
$\omega$	frequência natural de vibração
$\Delta T$	variação de temperatura
$\Phi_x, \Phi_y, \Phi_z$	componentes das forças de superfície nas direções $X, Y, Z$

## Matrizes e vetores

$\{u\}$	vetor com as componentes de deslocamento $(u, v, w)$ nas direções $X, Y, Z$
$\{\delta u\}$	vetor com as componentes de deslocamento virtual $(\delta u, \delta v, \delta w)$ nas direções $X, Y, Z$
$\{\bar{u}_e\}$	vetor de deslocamentos nodais do elemento segundo o sistema local de referência
$\{u_e\}$	vetor de deslocamentos nodais do elemento segundo o sistema global de referência
$\{\bar{F}_e\}$	vetor de forças equivalentes nodais do elemento segundo o sistema local de referência
$\{F_e\}$	vetor de forças nodais equivalentes do elemento segundo o sistema global de referência
$\{F\}$	vetor global de carregamentos nodais
$\{P_p\}$	vetor com os cossenos diretores da normal ao plano genérico $p$
$\{Q\}$	vetor global de carregamento nodal térmico equivalente
$\{\bar{Q}_e\}$	vetor de carregamento térmico equivalente nodal do elemento segundo o sistema local de referência